

LP36 : Diffraction par des structures périodiques dans différents domaines de la physique

June 16, 2019

Contents

1	Généralités : réseau plan unidimensionnel	3
1.1	Généralités	3
1.2	Diffraction par un réseau	4
1.2.1	ODG :	5
1.3	Intensité diffractée	5
1.3.1	Discussion dans le cas du réseau de fentes	7
2	Application à la spectroscopie	8
2.1	Pouvoir de résolution intrinsèque	9
2.1.1	ODG :	9
2.2	Principe et intérêt des réseaux blazés	9
3	Application à la cristallographie : diffraction des électrons	11
3.0.1	Principe :	11
3.0.2	Expérience :	12
4	Annexe	15
4.1	Motif blazé	15
4.2	Formulations de von Laue	16
4.3	Intensité diffractée	17
4.4	Méthode de Debye-Scherrer	17
4.4.1	ODG :	18

- 2017 : Il faut traiter de diffraction par des structures périodiques et pas seulement d'interférences à N ondes.
- 2015 : Il est important de bien mettre en évidence les différentes longueurs caractéristiques en jeu.
- 2012, 2013, 2014 : Cette leçon donne souvent l'occasion de présenter les travaux de Bragg ; malheureusement, les ordres de grandeur dans différents domaines ne sont pas toujours maîtrisés.
- 2009, 2010 : La notion de facteur de forme peut être introduite sur un exemple simple. L'influence du nombre d'éléments diffractants doit être discutée.

- 2008 : Diffraction par des structures périodiques dans différents domaines spectraux.
- 2007 : Le jury souhaite que la diffraction d'ondes autres que les ondes électromagnétiques soit envisagée. C'est pourquoi l'intitulé 2008 précise dans différents domaines de la physique.
- 2005 : On peut admettre que l'expression mathématique du principe de Huygens-Fresnel est acquise, ainsi que son application au cas d'une ouverture unique, plus particulièrement d'une fente fine.
- 2004 : Il faut veiller au bon équilibre de l'exposé : il est inutile de faire l'étude de la diffraction de Fraunhofer qui doit être supposée connue et il est souhaitable de consacrer plus de cinq minutes à l'étude de la diffraction des rayons X par les cristaux par exemple.
- 2003 : La leçon ne peut pas se limiter à une étude du réseau plan en optique. Il faut donc pouvoir dégager les idées importantes assez rapidement pour pouvoir passer à l'étude d'autres domaines.
- 2002 : Cette leçon doit être illustrée expérimentalement de manière efficace. Le pouvoir de résolution d'un réseau est toujours présenté, mais la détermination de son expression théorique pose systématiquement des problèmes aux candidats.

Bon courage !

Références :

- Optique, Pérez Base sur les réseaux
- Optique, Houard Pouvoir de résolution
- Physique des solides, Ashcroft Pour la formulation de Von Laue de la diffraction dans des cristaux, et une explication de la méthode des poudres
- Ondes lumineuses, R-J Champeau si l'on trouve que le Pérez et le Houard sont vraiment dégueu

Niveau : L3

Prérequis :

- Diffraction de Fraunhofer
- Interférences à N ondes
- Principe de Huygens-Fresnel et diffraction
- à Notions de cristallographie

Introduction

Cette leçon est la suite des deux leçons précédentes sur la diffraction de Fraunhofer et les interférences à deux ondes.



Expérience :

Montrer un DVD au public. On voit dessus une irisation de la lumière ambiante. Le DVD est gravé, c'est à dire qu'il est composé de nombreux sillons en spirale de l'ordre du demi micron. La lumière est diffractée par ces sillons et l'ensemble de ces sillons constitue un réseau de diffraction en réflexion.

La diffraction par une structure périodique permet donc d'obtenir le spectre de la lumière incidente. On peut alors en tirer deux applications.

- La première, appelée spectroscopie, étudie le spectre obtenu en connaissant très bien l'objet diffractant et permet de remonter aux propriétés de la source ; c'est la première application vue dans cette leçon.
- La seconde prend le phénomène dans l'autre sens : on connaît parfaitement la lumière incidente mais pas l'objet diffractant. L'étude de la figure de diffraction nous donnera alors des informations sur cet objet diffractant. Si l'objet en question est un cristal, on est dans la cristallographie ; c'est la deuxième application vue dans cette leçon.

Tout d'abord, étudions le cas plus simple : le réseau plan unidimensionnel afin de bien comprendre la physique du phénomène.

1 Généralités : réseau plan unidimensionnel

Houard : ça commence p 313 par le calcul sur une "pupille composée" =réseau en transmission.

1.1 Généralités

Un réseau plan unidimensionnel est un objet diffractant dont la transmittance¹ $\mathcal{T}_N$ est une fonction périodique.

Typiquement : Un réseau de fentes.

On le caractérise par :

Ordres de grandeur :

- | | |
|---|---|
| • L : longueur éclairée du réseau | <u>$L \approx 1 \text{ cm}$</u> |
| • a : pas du réseau | <u>$d \approx 1 \text{ à } 10 \text{ } \mu\text{m}$</u> Non discernable à l'oeuil. |
| • $n = \frac{1}{a}$: nombre de motifs par mm. | <u>$n \approx 50 \text{ à } 500 \text{ traits/mm}$</u> |
| • N : nombre de motifs éclairées | <u>$N \approx 500 \text{ à } 5000$</u> |
| • $\mathcal{T}$ fonction d transmittance d'un motif | On en parlera plus tard. |

On distingue plusieurs types de réseaux : les réseaux par transmission ou réflexion ainsi que les réseaux de phase et/ou d'amplitude. Ici nous nous intéresserons aux réseaux par transmission. Selon si la fonction de transmittance est imaginaire pure (introduit seulement un déphasage) ou bien possède une amplitude, on dit que le réseau est respectivement de phase ou d'amplitude.

¹Ou "fonction de transparence". Les deux se disent.

Les réseaux d'amplitude sont souvent fabriqués en verre, sur lesquels on a "collé" un métal que l'on a rayé périodiquement avec une pointe en diamant.

Pour les réseaux de phases, on verra après.

1.2 Diffraction par un réseau

Formule des réseaux

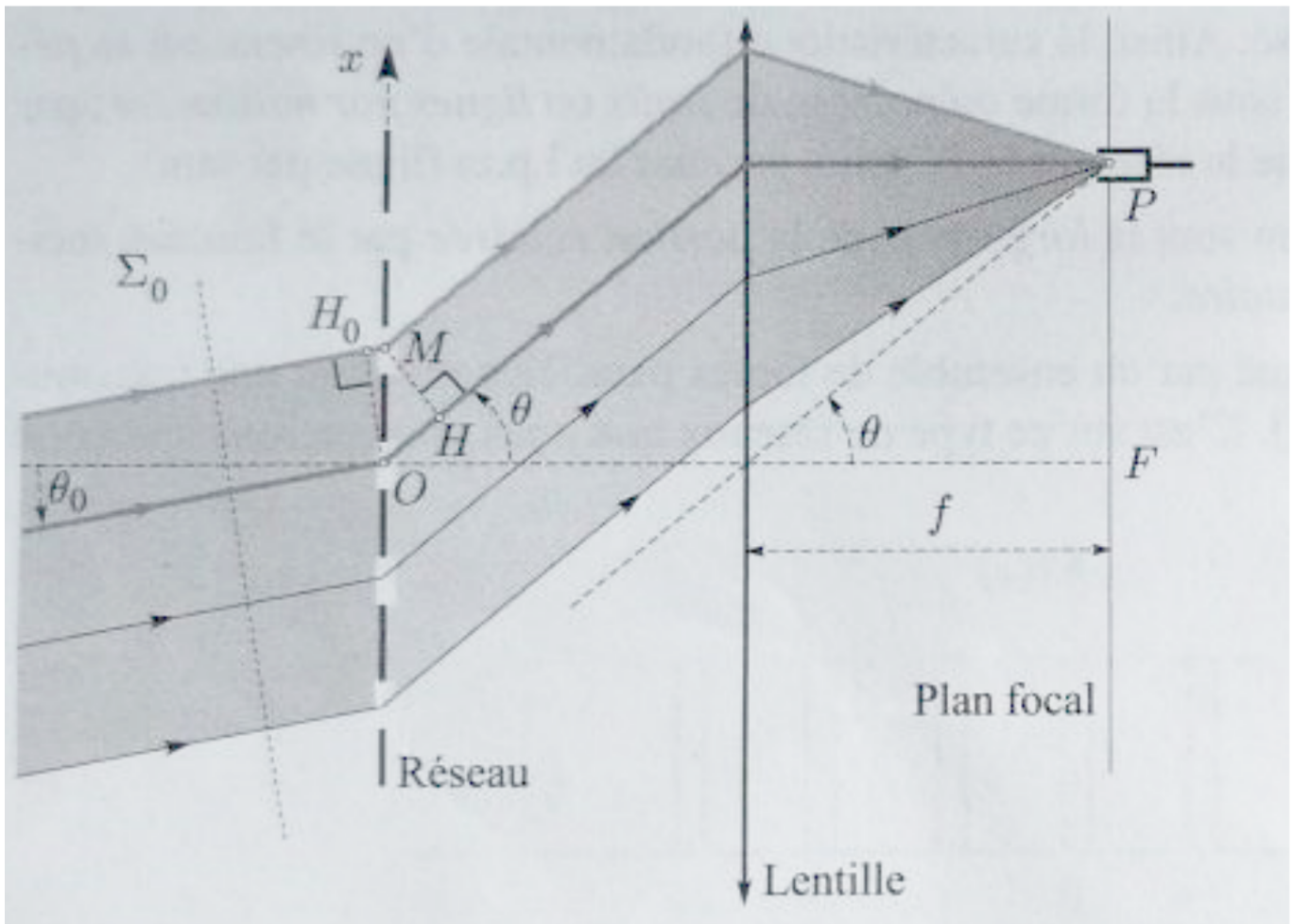


Figure 1: Schéma de la diffraction de Fraunhofer, extrait du Pérez p.356

Considérons un réseau de pas a dont chaque motif a une transmittance $\mathcal{T}$. On imagine qu'il est éclairé en lumière parallèle par une source monochromatique à λ avec une incidence θ_0 .

On se place dans le cadre, déjà vu, de la diffraction de Fraunhofer, et on regarde l'intensité diffractée dans une direction caractérisée par un angle de sortie θ . Pour observer expérimentalement cette intensité, on projette le faisceau parallèle de direction θ sortant du réseau sur un écran placé au plan focal image d'une lentille convergente.

Dans un premier temps, on ne s'intéresse pas à l'action de la lentille. On s'intéresse à la figure de diffraction en fonction de θ .

On ne s'intéresse qu'aux directions θ pour lesquelles on observe un maximum d'intensité diffractée. Celle-ci est maximale lorsque les ondes diffractées dans la direction θ par deux motifs successifs présente **une différence de marche multiple de la longueur d'onde** ; toutes les ondes interfèrent alors constructivement. La diffraction par les réseaux est un cas d'interférences à N ondes.

Avec les notations du schéma, on a alors :

$$OH - H_0M = p\lambda \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

et donc :

$$a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = p\lambda \quad (2)$$

$\Leftrightarrow$

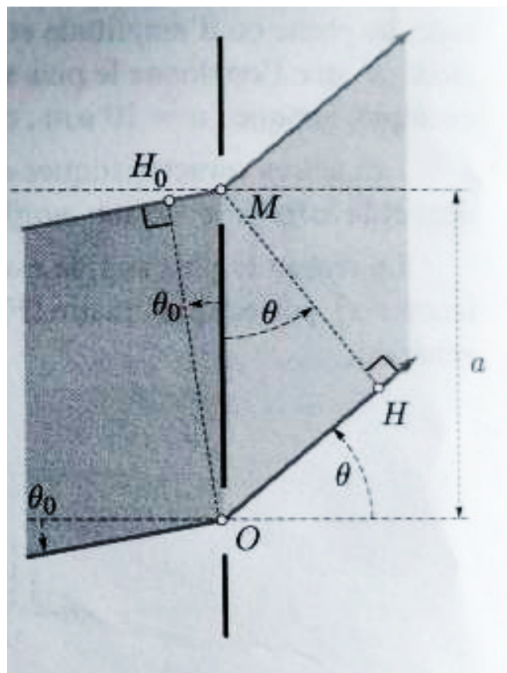


Figure 2: Zoom sur deux motifs successifs, extrait du Pérez p.356



Formule des réseaux :

$$\sin(\theta) - \sin(\theta_0) = p \frac{\lambda}{a} \quad (3)$$

Avec θ_0 et θ les angles respectivement d'incidence et réfracté et $p \in \mathbb{Z}$ l'ordre d'interférence. Cette formule porte de nom de formule des réseaux. On voit apparaître dans celle-ci le facteur $\frac{\lambda}{a}$ caractéristique de la diffraction.

On constate également que les pics de diffraction pour différentes valeurs de λ sont différents, et donc que le phénomène est dispersif, ce sur quoi on reviendra plus tard.

1.2.1 ODG :

De plus, on remarque que pour une incidence normale ($\sin \theta_0 = 0$) on a alors la limitation suivante : $|p| \leq \frac{1}{n\lambda}$

En ordre de grandeur, avec $\lambda = 500.10^{-9} \text{ m}$ (le milieu du spectre visible) et $n = 500 \text{ traits/mm}$, on obtient $|p| \leq 4$



TR :

| D'accord, mais quelle est la forme de cette figure de diffraction ?

1.3 Intensité diffractée

Rappelons le calcul de l'amplitude $\mathcal{A}$ de l'onde diffractée dans la direction θ pour une onde incidente d'angle θ_0 dans le cas d'un motif de transparence $\mathcal{T}$.

La base : RAPPEL

Le principe d'Huygens-Fresnel dans l'approximation de Fraunhofer donne :

$$\mathcal{A} = \underline{K} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{T}_{\mathcal{N}}(x) \exp(-i \{2\pi u x\}) dx \quad \text{avec : } u = \frac{\sin(\theta) - \sin(\theta_0)}{\lambda} \quad (4)$$

où $\underline{K}$ est une constante complexe à priori.

Pour un réseau, la transmittance totale des N motifs éclairés est reliée à la transmittance d'un seul motif $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{N}} = \sum_{m=1}^N (\mathcal{T}(x - ma)) \quad (5)$$

Donc :

$$\mathcal{A} = \underline{K} \int_{\mathbb{R}} \sum_{m=1}^N [\mathcal{T}(x - ma)] \exp(-i \{2\pi u x\}) dx \quad (6)$$

On peut dans le cas où les $\mathcal{T}$ ne se chevauchent pas (support compact plus petit que a).

$$\mathcal{A} = \underline{K} \sum_{m=1}^N \left[\int_{\mathbb{R}} \mathcal{T}(x - ma) \exp(-i \{2\pi u x\}) dx \right] = \underline{K} \sum_{m=1}^N \left[\int_{\mathbb{R}} \mathcal{T}(X) \exp(-i \{2\pi u (X + ma)\}) dX \right] \quad (7)$$

cours :

$$\mathcal{A} = \underline{K} \sum_{m=1}^N \underbrace{[\exp(-i \{2\pi u ma\})]}_{=S(u)} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathcal{T}(X) \exp(-i \{2\pi u X\}) dX}_{=f(u)} \quad (8)$$

$f(u)$ vient de la diffraction d'une fente unique, c'est le facteur de forme.

$S(u)$ traduit les interférences à N ondes^a.

^ace n'est **PAS** le facteur de structure dans le cas cristallin

Le résultat qu'on vient d'obtenir est assez général.

Nous allons poursuivre en calculant $S(u)$:

$$S(u) = \sum_{m=1}^N [\exp(-i \{2\pi u a\})]^m = N \frac{1 - \exp(-i \{2\pi N u a\})}{1 - \exp(-i \{2\pi u a\})} = N \underbrace{\frac{e^{+i\{ \pi N u a \}}}{e^{+i\{ \pi u a \}}}}_{\text{phase}} \frac{\sin(\pi N u a)}{\sin(\pi u a)} \quad (9)$$

Donc au final, l'intensité sur l'écran est :

Intensité diffractée :

$$I(u) = I_0 |f(u)|^2 \left| \frac{\sin(\pi Nua)}{\sin(\pi ua)} \right|^2 \quad \text{avec : } u = \frac{\sin(\theta) - \sin(\theta_0)}{\lambda} \quad (10)$$

1.3.1 Discussion dans le cas du réseau de fentes

On se place dans le cas de l'incidence normale donc $\sin(\theta_0) = 0$.

Dans le cas d'une fente simple d'épaisseur b , on a montré dans la leçon sur la diffraction de Fraunhofer :

$$f(u) = \text{sinc}\left(\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda}\right) \quad (11)$$

donc :

Pour un réseau de fentes simples (b) :

$$I(u) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda}\right) \left| \frac{\sin(\pi Nua)}{\sin(\pi ua)} \right|^2 \quad (12)$$

a pas du réseau

b taille de la fente

On la représente en figure 3.

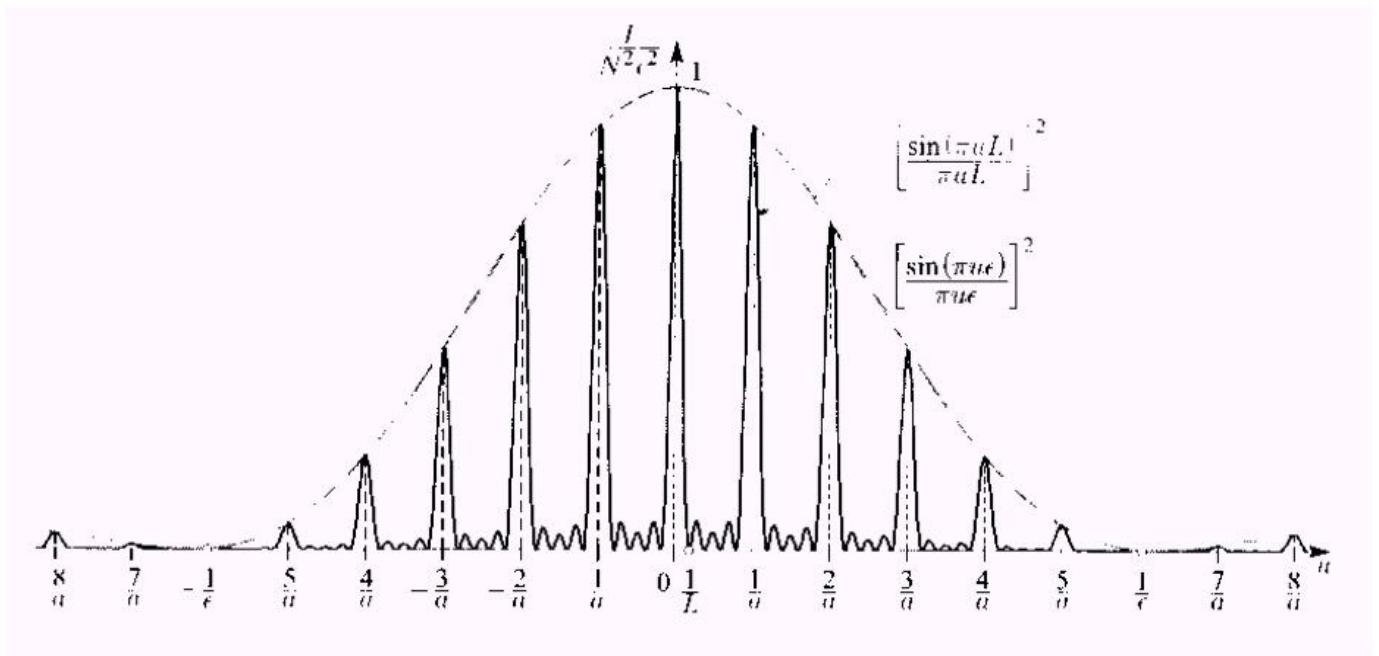


Figure 3: Intensité diffractée selon la direction θ en incidence normale. Le sinus cardinal s'annule tous les $b \sin(\theta) = \pi$. Les pics pointus sont espacés de $1/a$. ils correspondent à la périodicité du réseau. Ce ne sont pas des Diracs car N n'est pas infini.

Commentaires sur la figure 3 :

Plusieurs observations doivent être faites sur la figure 3 :

- D'abord, on observe une série de pics très intenses et fins. Ce sont les **ordres de diffraction du réseau**. Cella correspond aux différents p .
 - La **distance entre deux de ces pics (ordres)** est proportionnelle à $1/a$.
 a est le pas du réseau, soit la distance entre deux motifs consécutifs.
 - La **largeur d'un pic (ordre)** est proportionnelle à $1/(Na)$.
Le fait que la zone du réseau éclairée ne soit pas infinie fait donc que l'on n'a pas des Diracs sur l'écran.
- Ensuite, on remarque que **la figure totale est modulée par la figure de diffraction d'un motif**. Ici un sinus cardinal car on avait une fente rectangulaire.
 - La **largeur de l'enveloppe (qui détermine le nombre de pics (ordres) visibles est proportionnelle à $1/b$** avec b la largeur typique d'un motif.
- L'intensité globale évolue comme N^2 car $I_0 \propto N^2$

Remarque :

Si on utilise une lentille pour conjuguer l'écran dans les conditions de Gauss, les angles sont alors très petits et on peut écrire $\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx x/f'$

TR :

Voilà pour la théorie fondamentale. Maintenant passons aux applications.

2 Application à la spectroscopie

Dans tout ce qui suit, on considère que $\theta_0 = 0$.

Experience :

Faire l'image d'une fente (assez fine mais pas trop pour avoir de la lumière) sur le mur ou sur un écran par une lentille convergente de focale adaptée : pas besoin d'une image de 3 m de haut, mais pas de 2 cm non plus.

Placer un filtre interférentiel sur le faisceau de la lampe à Hg afin de ne sélectionner qu'une seule raie. Nous avons choisi la raie verte car c'est ce que nous préférons mais vous pouvez choisir le doublet jaune ou la raie bleu (mais moins lumineuse).

Montrer la diffraction (en monochromatique grâce au filtre) et montrer les ordres 0, +1, -1 etc...

Enlever le filtre et montrer que le phénomène est dispersif : les raies de la lampe à vapeur de mercure ne sont pas diffractées avec le même angle. Si vous voulez voir les deux raies de Hg dans l'UV, placer une feuille blanche sur l'écran/mur.

Noter que le rouge est plus dispersé que le bleu, c'est le contraire du prisme.

2.1 Pouvoir de résolution intrinsèque

Houard p322 ou Ondes lumineuses page 651

L'utilité d'un réseau en spectroscopie est directement lié à sa capacité à séparer les pics de diffraction correspondant à deux longueurs d'onde proches λ et $\lambda + \delta\lambda$. Cette capacité est mesurée par le pouvoir de résolution du réseau ;

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{min}} \quad (13)$$

où $\delta\lambda_{min}$ est la différence de longueur d'onde minimale discernable par le réseau². . On trouve :

 **cours :**

$\mathcal{R} = mN$
(14)

$\mathcal{R}$ dépend uniquement de l'ordre observé et du nombre de traits éclairés N , et non directement du pas du réseau.

Il ne dépend pas de λ

2.1.1 ODG :

Pour un réseau³ avec $n = 500 \text{ traits/mm}$, $L = 20 \text{ mm}$ et $m = 1$: $\mathcal{R} = 10^4$

Cette méthode reste néanmoins plus résolvente qu'un prisme : le pouvoir de résolution du prisme est de l'ordre de 10^3 .

2.2 Principe et intérêt des réseaux blazés

⁴

On l'a vu dans l'expérience, pour un réseau de simples fentes, c'est l'ordre 0 qui est le plus lumineux. Et très vite, on ne peut plus distinguer les ordres supérieurs. C'est beaucoup d'intensité qui n'est pas utile (l'ordre 0 est blanc)

Or, on l'a vu, c'est bien la figure de diffraction d'un seul motif qui influence l'enveloppe⁵. On est capable de fabriquer des motifs qui concentrent l'intensité dans un mode différent. Un exemple est le **réseau blazé**

Et bien **le réseau blazé est capable de concentrer l'intensité sur un ordre supérieur.**

²On va se servir du critère de Rayleigh : la limite à laquelle on peut séparer deux pics d'intensité est lorsque le maximum du premier correspond au 1er minimum du second. Voir Houard

³En réalité, cela correspond au pouvoir de résolution intrinsèque auquel nous n'avons pas accès. Ce calcul est mené par une fente infiniment fine, donc pas de lumière. En réalité, la fente a une certaine largeur et le pouvoir de résolution diminue.

⁴On appelle ça aussi un réseau échelette

⁵Il faut garder à l'esprit que bouger le réseau ne change rien en Fraunhofer. Par contre, bouger la source et donc θ_0 déplace la figure totale. En effet, la figure de diffraction est autour de l'image géométrique de la source.

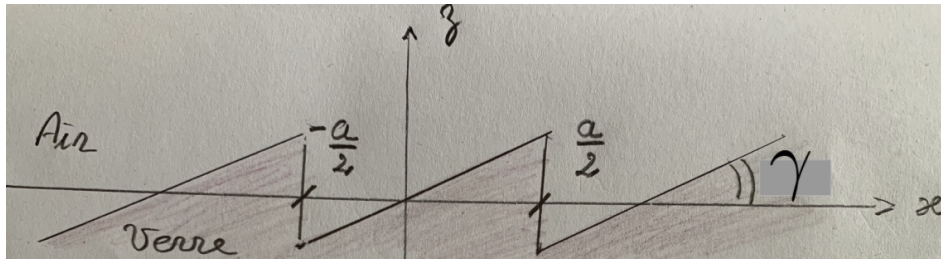


Figure 4: C'est x_1 et pas x sur l'axe. L'axe optique est suivant z . Le réseau lui, il dit "PFF !"

Chaque motif est un prisme en verre avec un angle γ , voir figure 4. On obtient que sa transparence s'exprime :

$$\mathcal{T} = \Pi_a \times \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\gamma x_1\right) \quad (15)$$

Intérêt du réseau blazé :

$$\mathcal{A}(x) = C \operatorname{sinc} \left[\pi \left(u - (n-1) \frac{\gamma}{\lambda} \right) \right] \quad (16)$$

Le facteur de forme de la figure de diffraction est alors translaté horizontalement, tandis que le facteur de structure n'est pas modifié. Par cette méthode, on peut obtenir des ordres 2 ou 3 bien plus visibles. Il suffit de choisir l'angle γ en fonction. Le principe est illustré en figure 5.

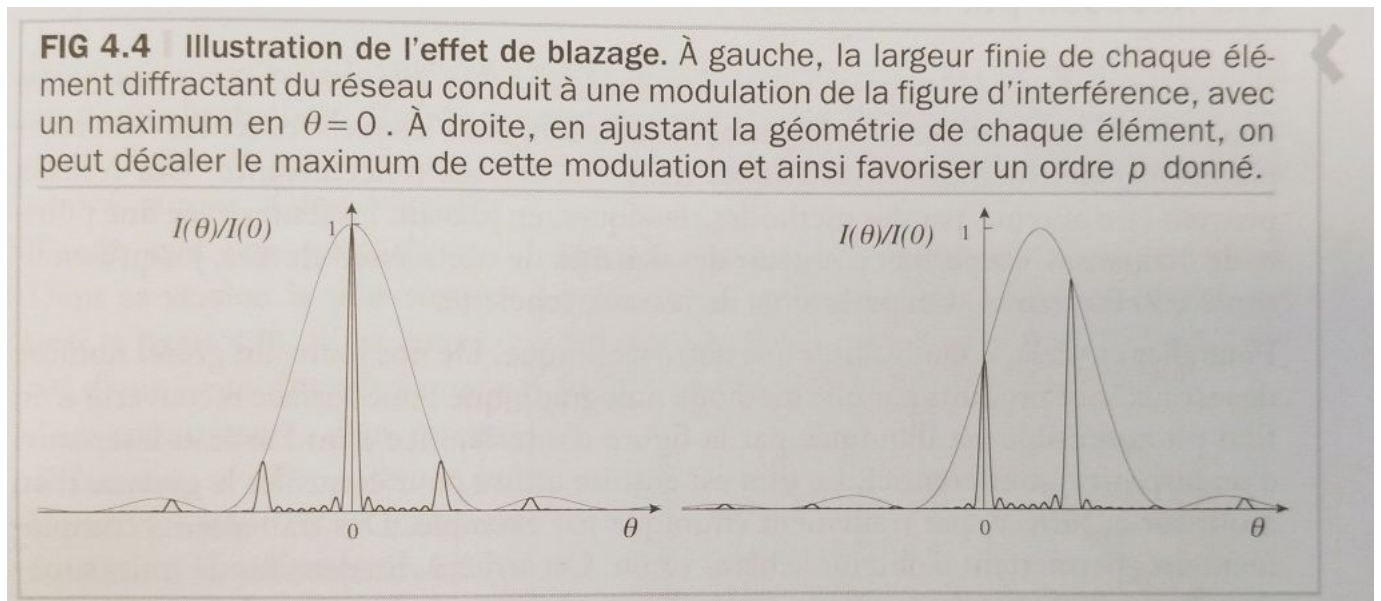


Figure 5: Comparaison de $I(\theta)$ pour un réseau normal et un blazé de même pas, extrait du Taillet

Remarque : Les différentes longueurs d'ondes donnent des figures de périodicité différentes et souvent pour $\lambda \in [400 \text{ nm}; 800 \text{ nm}]$, au delà de l'ordre 2 ou 3, les différents ordres se superposent.

Aussi, cela fait qu'un réseau blazé est spécifique d'une fenêtre de valeurs de λ

TR :

On a vu qu'un réseau dont les caractéristiques sont connues permet d'analyser la lumière incidente.

L'inverse est possible aussi. On peut utiliser une onde connue pour obtenir des informations géométriques sur un objet. C'est l'application qu'on va étudier à présent.

3 Application à la cristallographie : diffraction des électrons

Aschcroft p110 à relire si le temps pour les questions car ce n'est pas évident

Les électrons accélérés par un champ électrique sont diffractés par le graphite et permettent la mesure des caractéristiques du cristal.

3.0.1 Principe :

Nous allons diffracter des électrons sur une poudre : c'est la méthode de Debye-Sherrer. Il serait possible d'observer la diffraction avec des ondes électromagnétiques, mais cela requiert des rayons X durs qui sont ionisants et très dangereux pour l'être humain. Le dispositif que nous avons à disposition ne présente pas cet inconvénient et permet une observation aisée du phénomène. Ceci est possible grâce à la nature ondulatoire des électrons, dont la longueur d'onde associée est la longueur d'onde de De Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$, où h désigne la constante de Planck et p l'impulsion des électrons.

Le dispositif étudié, schématisé, présente une anode et une cathode entre lesquelles les électrons produits par un filament chauffant sont accélérés, ce qui permet d'avoir un faisceau quasi-monocinétique et donc quasi-monochromatique. Si on note E_c l'énergie cinétique des électrons, U la tension accélératrice, e la charge et m la masse de l'électron, on a :

$$E_c = eU = \frac{p^2}{2m} \quad \text{donc} : \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m eU}} \quad (17)$$

Pour $U = 1 \text{ kV}$, on a $\lambda = 39 \text{ pm}$, ce qui est bien inférieur à la distance interatomique.

Le faisceau électronique est ensuite focalisé à l'aide d'une électrode spécifique, puis envoyé sur une poudre de graphite. Celle-ci diffracte la lumière dans des directions bien précises par rapport au faisceau incident, données par la loi de Bragg. Ce dernier (Prix Nobel de Physique en 1915) suppose en 1913 que la lumière incidente va se réfléchir sur des plans comme sur un miroir parfait.

Se servir de la figure 6.1 p113 dans livre d'Aschcroft physique des solides pour expliquer la formule de Bragg.

$$\lambda = 2d \sin(\theta) \quad (18)$$

où d désigne la distance entre deux plans dit réticulaires, et θ l'angle de déviation par rapport au faisceau incident.

Condition de Bragg :

La condition d'observation de pics est que cette interférence doit être constructive :

$$\delta = 2d \sin(\theta) = p\lambda \quad (19)$$

Donc la position d'un maximum d'intensité nous donne θ donc, connaissant parfaitement λ^a on peut trouver d .

^aOn suppose les interactions élastiques: λ réémis est le même)

L'objet diffractant étant une poudre, on observe une figure de diffraction composée d'anneaux. En faisant l'approximation des petits angles, le diamètre D des cercles est donné par la relation :

$$\lambda = d \frac{D}{2L} \quad (20)$$

où L est la distance entre l'objet diffractant et l'écran. Donc enfin :

$$\frac{1}{D} = d \frac{\sqrt{2m e U}}{2hL} \quad (21)$$

Expérimentalement, on mesure donc le diamètre des cercles de diffraction pour différentes tensions accélératrices U .

3.0.2 Expérience :

Faire quelques points en préparation et un devant le Jury.

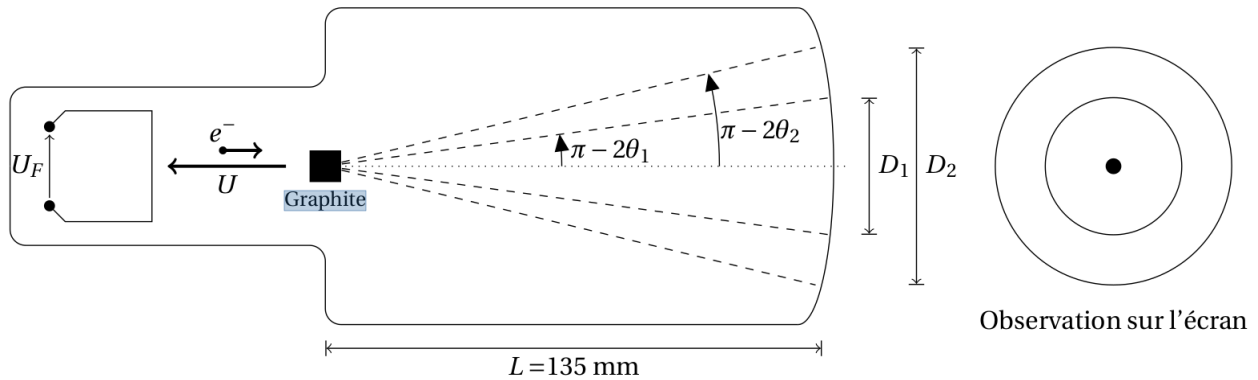


Figure 6: Schéma du tube pour la diffraction électronique par la poudre de graphite.

Expérience :

• Branchement :

- Tenir le tube de diffraction P93.6 à l'horizontale et le tourner de façon à ce que les deux broches les plus éloignées du culot soient orientées vers le bas. Introduire doucement le tube jusqu'en butée dans le support pour tube P93.1.
- Brancher les sorties F1 et F2 à l'arrière du support pour tube sur les sorties 6.3V/2A à l'arrière de l'alimentation P43.10.
- Raccorder les sorties C et X au pôle négatif de la sortie haute tension, puis la

sortie A au pôle positif, et relier le pôle positif à la terre.

Vérifier le bon branchement sur la notice avant de mettre en marche l'alimentation !

- Allumer l'alimentation et observer la direction du faisceau.^a
- Appliquer une tension $U \leq 5 \text{ kV}$ et observer la figure de diffraction. L'écran est bombé car l'ampoule est sous vide, ce qui rend la mesure délicate. Pour mesurer le diamètre D des cercles, on utilise alors une grille P127.2. Pour différentes tensions U prendre en photo la figure de diffraction et la grille plaquée (doucement) sur le tube de verre. Sur Image J, relever le diamètre des deux cercles (on prendra pour étalon le pas de la grille, de 1 mm a priori).^b
- ou simplement à l'oeil avec une feuille de papier millimétré; Non ??
- La tension est mesurée sur l'affichage de l'alimentation^{c,d}.

^aVérifier en approchant un aimant en U P63 que le faisceau est dévié : il s'agit bien de particules chargées.

^bLéo propose : "Pour mesurer le diamètre des anneaux, au lieu d'utiliser un papier millimétré scotché plus ou moins maladroitement sur l'extrémité courbe de la bouteille, il est préférable d'utiliser un pied à coulisse (et de ne pas appeler ça un Palmer). Attention, si votre pied à coulisse est aimanté (pour une raison encore mystérieuse), changez-en ou arrangez-vous pour qu'il dévie suffisamment peu les électrons pour que [cela n'influence pas trop la mesure]"

^cles multimètres que nous avons ne supportant pas de tension supérieure à 1 kV (!!)

^dApparemment, on a des kilovoltmètres dans la collection. Mais on se prend le jus dès qu'on y touche. Je défendrai que pour la sécurité, il ne vaut mieux pas les prendre.

On trace $1/D$ en fonction de $\frac{\sqrt{2meU}}{2hL}$. Avec :

- $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ désigne la masse de l'électron ;
- $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$ désigne la charge élémentaire ;
- $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ désigne la constante de Planck ;
- $L = 135 \text{ mm}$ désigne la longueur du tube. (cf notice)

On attend une pente⁶ égale à d .

On observe deux anneaux qui correspondent aux deux premières familles de plans du graphène dont les valeurs tabulées sont $d_1 = 213 \text{ pm}$ et $d_2 = 123 \text{ pm}$ (on a géométriquement un rapport 3 entre les deux).

Les autres familles de plans réticulaires donnent des anneaux trop petits et qui sont confondus avec la tâche centrale (la distance interréticulaire⁷ entre deux plans de graphène est de 671 pm).

⁶Ces anciens disent : "Nos mesures donnent toujours une valeur de pente inférieure de 5% à la valeur attendue (pour les deux droites). Après discussion avec Hervé Gayvallet, il est probable que cela vienne de la tension d'accélération des électrons, inférieure à celle mesurée pour une raison ou pour une autre. Comme U apparaît sous une racine dans la formule, le fait que nos droites soient effectivement des droites, et ne soient pas déformées, indique bien qu'il s'agit d'un facteur multiplicatif et pas d'un offset. Problème ouvert."

⁷ il existe une infinité de plans parallèles entre eux et regroupés en une famille de plans réticulaires. La distance interréticulaire est la plus courte distance entre deux plans de la famille

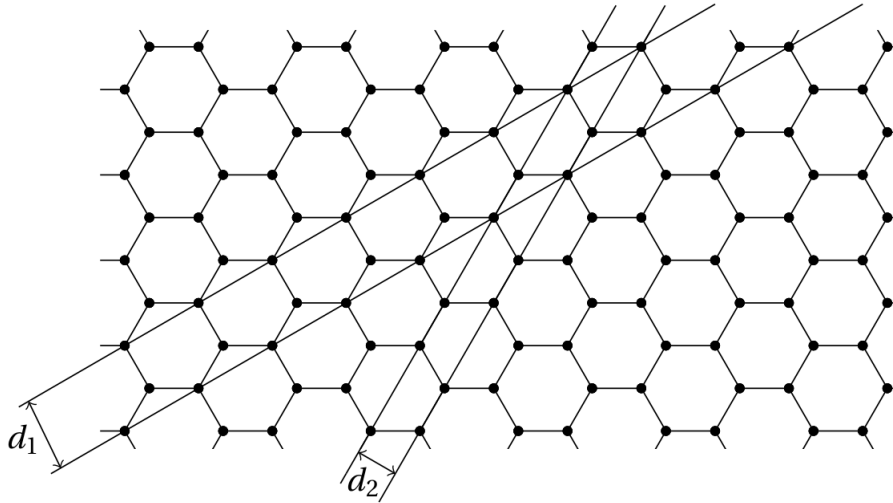


Figure 7: Plans réticulaires sur le graphite.

Conclusion

On a vu que la diffraction par des structures périodiques avait des propriétés fort utiles :

- en connaissant les propriétés du réseau utilisé, on peut déduire de la figure de diffraction des propriétés de la source lumineuse, l'intérêt de cette méthode étant son pouvoir de résolution potentiellement très élevé ;
- en connaissant les caractéristiques de l'onde envoyée sur la structure diffractante, on peut en déterminer des propriétés structurales qu'il est difficile d'obtenir par d'autres moyens ; d'ailleurs, la diffraction par des rayons X est longtemps restée la méthode privilégiée pour sonder la matière solide.

Ici, on a utilisé le modèle scalaire de la lumière pour étudier la diffraction. Il serait intéressant de s'attaquer à la nature vectorielle de la lumière avec l'électromagnétisme ce qui nous permettrait de comprendre les propriétés du prisme.

4 Annexe

4.1 Motif blazé

Voici un réseau blazé. Comme on ne s'intéresse pas aux structures periodiques spécifiquement, On va simplement s'intéresser ici à une dent de ce réseau. On se limite entre $-a/2$ et $+a/2$. L'épaisseur traversée dans le verre est donc :

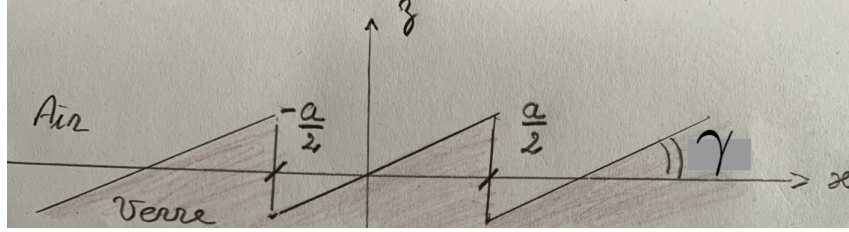


Figure 8: C'est x_1 et pas x sur l'axe. L'axe optique est suivant z . Le réseua lui, il dit "PFF !"

$$e(x_1) = \gamma x_1 \quad (22)$$

Un rayon traversant le motif prend donc une phase (par rapport à si il traversait de l'air) :

$$\phi(x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\gamma x_1 \quad (23)$$

La fonction de transparence du motif est donc :

$$\mathcal{T} = \Pi_a \times \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\gamma x_1\right) \quad (24)$$

La vibration en x sur La figure de diffraction donnée dans les conditions de Franhofer est donc :

$$a(x) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_a \times \exp\left(\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\gamma x_1\right) \exp(-i2\pi u x_1) dx_1 \quad (25)$$

$$= C \int_{-a/2}^{+a/2} \exp\left[-i2\pi x \left(u - (n-1)\frac{\gamma}{\lambda}\right)\right] dx_1 \quad (26)$$

Donc :

$$a(x) = C \operatorname{sinc}\left[\pi\left(u - (n-1)\frac{\gamma}{\lambda}\right)\right] \quad (27)$$

Donc l'intensité :

$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2\left[\pi\left(u - (n-1)\frac{\gamma}{\lambda}\right)\right] \quad (28)$$

On voit que la figure de diffraction est cette fois ci centrée en $(n-1)\frac{\gamma}{\lambda}$. Avec un tel réseau, on peut donc choisir quel ordre du réseua on veut visualiser en particulier en y concentrant l'intensité.

C'est particulièrement utile dans le cas de l'obtention d'un spectre car pour un réseau simple, on a le maximum d'intensité qui coïncide avec la raie blanche de l'ordre 0. Cette fois-ci, on peut concentrer l'intensité sur l'ordre 1 par exemple.

4.2 Formulations de von Laue

Aschcroft p112 - 115

Bragg (Prix Nobel de Physique en 1915) suppose en 1913 que la lumière incidente va se réfléchir sur les plans réticulaires⁸. La différence de marche δ s.

Van Laue va en fait travailler sur le réentre deux faisceaux issus de la réflexion sur deux plans réticulaires consécutifs est dans le cas d'interférences constructives :

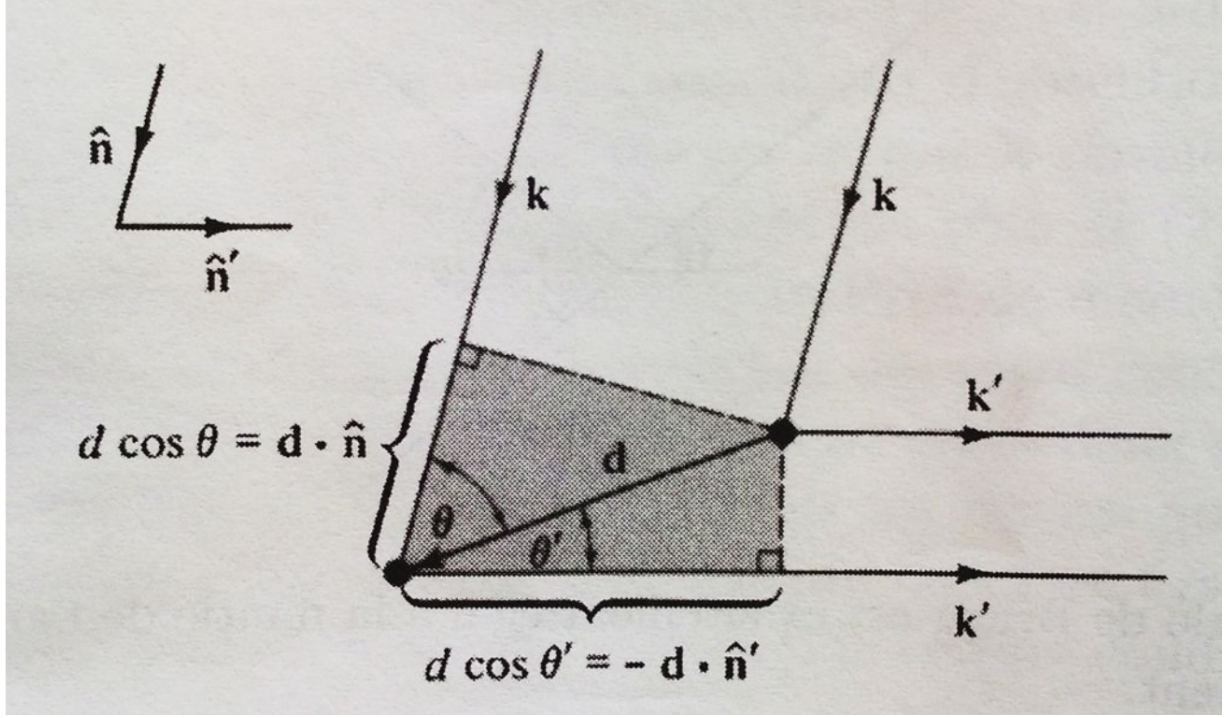


Figure 9: Diffraction de Bragg, extrait du Ashcroft

Comme précédemment, les ondes interfèrent constructivement lorsque la différence de marche en sortie est un multiple de la longueur d'onde :

$$\cos(\theta_0) + \cos(\theta) = d \cdot (\vec{n} - \vec{n}_0) = m\lambda \quad (29)$$

où $\vec{d} \approx a\vec{e}_y$ s'apparente au pas du réseau.

donc lorsque :

$$\vec{d} \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0) = 2\pi m \quad (30)$$

Ainsi, on a interférences constructives à l'échelle du réseau lorsque pour tout vecteur $\vec{R}$ décrivant la position d'un atome dans le réseau, $\vec{R} \cdot (\vec{k} - \vec{k}') = 2\pi m$, donc lorsque pour tout $\vec{R}$ du réseau :

$$\exp\left(i \left\{ \vec{R} \cdot (\vec{k} - \vec{k}') \right\}\right) \quad (31)$$

Cette formule est un équivalent de la formule des réseaux de la première partie.

⁸Comme sur un mirior parfait il faut comprendre. Cette condition nécessite qu'on choisisse une famille de plans qui contiennent le cristal.

Et c'est parce que plusieurs familles de plan fonctionnent u'on observe plusieurs pics. Connaître l'ensemble de ces plans réticulaires et leurs vecteurs K donne en fait accès à la cellule élémentaire du réseau de Bravais de bravais directement ce qui est plus général au sens où on ne choisit pas de plans. Cependant, la formulation est tout à fait générale.

4.3 Intensité diffractée

Aschcroft p123

Déterminons maintenant l'amplitude et l'intensité diffractées pour $\vec{K} = \vec{k} - \vec{k}'$ quelconque. Comme précédemment, l'amplitude diffractée par un unique atome s'écrit :

$$\mathcal{A} = A_0 f(\vec{K}) \quad (32)$$

où $f(\vec{K})$ est un facteur d'amplitude ne dépendant que de la taille de l'atome. Le déphasage entre les ondes diffractées par les motifs i et j s'écrit :

$$\Delta\phi = \vec{K} \cdot (\vec{d}_j - \vec{d}_i) \quad (33)$$

En prenant l'origine sur l'un des atomes, l'amplitude diffractée est donc :

$$\mathcal{A} = A_0 f(\vec{K}) \sum_j \exp \left(\{ \vec{K} \cdot \vec{d}_j \} \right) \quad (34)$$

et l'intensité diffractée est donc :

$$I = I_0 \left| f(\vec{K}) \right|^2 \left| \sum_j \exp \left(\{ \vec{K} \cdot \vec{d}_j \} \right) \right|^2 \quad (35)$$

On reconnaît le formalisme introduit dans la partie I : f est le facteur de forme (qui vaut 1 lorsque le motif diffractant est un atome simple supposé ponctuel)

La somme est le **facteur de structure dépendant des paramètres du réseau**. C'est son étude qui permet d'avoir accès à la géométrie de la maille.

4.4 Méthode de Debye-Scherrer

Lire⁹ les différentes représentations avec la sphère d'Ewald pour les questions.

Plusieurs méthodes existent pour réaliser la figure de diffraction d'un cristal¹⁰. On présente ici la méthode des poudres de Debye. Les grains d'une poudre de cristal solide sont petits à l'échelle macroscopique mais restent très gros à l'échelle atomique ; chaque grain constitue donc

⁹lire aussi sur l'expérience de Davisson et Germer, qui a permis de valider l'hypothèse de de Broglie selon laquelle un faisceau d'électrons se comporterait comme une onde : encore une utilisation des propriétés de la diffraction par des structures périodiques.

¹⁰Il existe trois méthodes afin d'obtenir plusieurs pics de diffraction.

- La première est la méthode de Laue : on fait varier λ ; on augmente le rayon de la sphère d'Ewald et on intercepte plusieurs points.
- La deuxième est la méthode du cristal tournant : on fait tourner le cristal selon un axe ; cela revient à faire tourner le réseau réciproque selon un axe passant par O, on obtient donc plusieurs pics. (les points du réseau deviennent des cercles qui coupent forcément la sphère d'Ewald)
- La troisième est la méthode des poudres (Debye - Scherrer) : statistiquement, toutes les orientations sont représentées (grains d'un diamètres de quelques microns) ; cela revient à $\vec{K}$ qui parcourt une sphère de centre O et de rayon K .
L'intersection de cette sphère avec la sphère d'Ewald donne toutes les directions diffractées. On obtient alors un cône d'angle 4θ

un cristal orienté différemment des autres. La figure de diffraction produite par la poudre est donc la superposition des figures de diffraction que l'on obtient à partir de toutes les orientations possibles du cristal.

On montre alors que dans ce cas, on obtient des cônes de rayonnement d'angle ϕ pour chaque d du réseau, vérifiant¹¹ :

$$\lambda \approx d \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \approx d \frac{D}{2L} \quad (38)$$

avec D le diamètre du cercle correspondant à la famille de plans réticulaires espacés de a et L la distance entre la poudre et l'écran d'observation.

Avec la diffraction, on a l'habitude que les plus petites distances donnent de grandes figures et inversement. L'anneau le plus large correspond alors aux paramètres de maille du réseau (i.e. le plus grand d) :

$$a = 2L \frac{\lambda}{D} \quad (39)$$

4.4.1 ODG :

La distance interatomique est de l'ordre de 10^{-10} m :

On peut utiliser :

- **Ondes électromagnétiques** : $\nu = 10^{18} \text{ Hz}$ $E = 10^4 \text{ eV}$: on est dans le domaine **des rayons X**.
- **les faisceaux d'électrons** : longueur d'onde de de Broglie : $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} = 10^{-10} \text{ m}$ donc, il faut les accélérer par $U = 10^3 \text{ V}$ sur 1 m
- **les faisceaux de neutrons** : longueur d'onde de de Broglie $\lambda = \frac{h}{\sqrt{3Mk_B T}} = 10^{-10} \text{ m}$ qu'il faut alors chauffer à environs 400 K

¹¹Il y a une notation délicate ici : ϕ c'est l'angle total du cône. On a **pour les petits angles** : $\phi/2 = \pi - 2\theta$
Par définition : $\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \approx \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \approx \frac{D}{2L}$ Or :

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \approx \sin(\pi - 2\theta) \approx \tan(\pi - 2\theta) \approx 2 \tan(\theta) \approx 2 \sin(\theta) \quad (36)$$

Donc on a bien :

$$\lambda = 2d \sin(\theta) = d \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \approx d \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \iff \lambda = d \frac{D}{2L} \quad (37)$$