LP 41 – Effet tunnel

4 juin 2019

Marc Lagoin (discussion) & Ramborghi Thomas

Niveau : L2

Bibliographie

✍ *Physique tout-en-un PC|PC*, J'intègre*, **M.-N Sanz** Voir partie 3 du chapitre 34 page 1200 pour le I et la partie 4 page 1207 pour la partie II.

✍ *Leçon de 2015*, **Bastien GUIGUE** Pour le calcul de la prière partie et avoir des exemples non-traité en tête pour les questions

Prérequis

- Notion de fonction d'onde
- Équation de Schrödinger, équation aux valeurs propres
- Incertitude de Heisenberg
- Densité de courant de probabilité

Table des matières

Remarque générale pour cette leçon : Pour moi l'idée est ici je prendre son temps sur la première partie en l'approfondissant bien et caser un calcul classique par la même occasion. Avec le temps qu'il reste nous présentons des applications avec les mains. L'idée est de partir sur une seul : la microscopie et si nous avons encore du temps choisir un second exemple tel que la radioactivité α.

Introduction

Nous pouvons prendre l'introduction de la leçon de Bastien GUIGUE qui est cool.

Nous commencerons par une introduction formelle de l'effet tunnel puis nous nous intéresserons au grand domaine d'application de cette théorie.

1 Introduction : barrière de potentiel et effet tunnel

Pour la première partie, je renvoie à la leçon de Bastien GUIGUE pour ne pas perdre du temps à réécrire le calcul qui est bien fait. Je vais cependant le compléter et essayer de donner un peu plus d'interprétation physique.

Tout d'abord je détail le calcul de la probabilité de transition. Je pense qu'il est important de donner les grandes étapes à l'oral sans les écrire. Nous partons des équations :

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \\ i\,k\,(A_1 - A_2) = \rho\,(B_1 - B_2) \\ B_1\,e^{\rho\,a} + B_2\,e^{-\rho\,a} = C_1\,e^{i\,k\,a} \\ \rho\,B_1\,e^{\rho\,a} - \rho\,B_2\,e^{-\rho\,a} = i\,k\,C_1\,e^{i\,k\,a} \end{cases} \tag{1}$$

En multipliant l'équation 3 par ρ et en lui soustrayant l'équation 4, nous obtenons :

$$2\,\rho\,B_2\,e^{-\rho\,a} = (\rho - i\,k)C_1\,e^{i\,k\,a} \tag{2}$$

De même, en multipliant la première par $i\,k$ et en lui ajoutant l'équation 2, nous avons :

$$2\,i\,k\,A_1 = (i\,k + \rho)\,B_1 + (i\,k - \rho)\,B_2 \tag{3}$$

Après avoir fait disparaitre A_2, l'idée est maintenant d'en faire de même pour B_1 puis B_2. Pour cela, nous remplaçons B_1 dans l'équation 3 grâce à la troisième équation :

$$2\,i\,k\,A_1 = (i\,k + \rho)C_1\,e^{i\,k\,a - \rho\,a} + (i\,k + \rho)\,B_2\,e^{-2\,\rho\,a} + (i\,k - \rho)\,B_2 \tag{4}$$

Puis, nous exprimons B_2 en fonction de C_1 grâce à l'équation 2 :

$$2\,i\,k\,A_1 = (i\,k + \rho)\frac{C_1\,e^{i\,k\,a - \rho\,a}}{\rho} + (i\,k + \rho)\,e^{-\rho\,a}\,\frac{(\rho - i\,k)}{2\,\rho}\,C_1\,e^{i\,k\,a} - (\rho - i\,k)^2\,\frac{C_1\,e^{i\,k\,a}}{2\,e^{-\rho\,a}\,\rho} \tag{5}$$

que nous pouvons simplifier :

$$\begin{aligned} 4\,\rho\,i\,k\,A_1\,e^{-\,i\,k\,a} &= C_1\left(e^{-\rho\,a}\big(2\,\rho\,(i\,k + \rho) + \rho^2 - (i\,k)^2\big) - (\rho - i\,k)^2 e^{\rho\,a}\right) \\ &= C_1\left(e^{-\rho\,a}\big(2ik\rho + 4\rho^2 - \rho^2 - (ik)^2\big) - (\rho^2 - 2ik\rho + (ik)^2)e^{\rho\,a}\right) \\ &= C_1\left(4\,\rho^2 e^{-\rho a} - (\rho - ik)^2\,\cosh(\rho a)\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$T = \mid \frac{C_1}{A_1} \mid^2 = \frac{16\rho^2 k^2}{\mid 4\,\rho^2 e^{-\rho a} - (\rho - ik)^2\,\cosh(\rho a) \mid^2} \tag{6}$$

Sous l'hypothèse d'une barrière épaisse, nous obtenons :

$$T \approx \frac{16\rho^2 k^2}{(\rho^2 + k^2)^2}\,e^{-2\rho a} \tag{7}$$

Soit en remplaçant ρ et k dans la fraction par leur expression en fonction de l'énergie et du potentiel :

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\rho a} \quad \text{avec :} \quad \rho = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \tag{8}$$

Je donne maintenant quelque élément de discussion à donner en plus du calcul dans cette partie :

Cet effet tunnel observé pour une onde arrivant sur une barrière de potentiel et se retrouve également dans le cas d'un puits de longueur finit. Son traitement montre qu'une particule quantique piégée dans un puits de profondeur finie, et d'énergie $E \ll V_0$, voit un puits de potentiel de profondeur infinie de largeur $a_{eff} = a + 2\,\delta$. L'onde pénètre sous forme d'onde évanescente sur une petite longueur.

Il est important de bien dire que l'effet tunnel est un effet tout à fait remarquable et propre à la mécanique quantique. En effet, en mécanique classique une particule incidente ayant une énergie inférieur à V_0 est réfléchis et la probabilité de transmission est rigoureusement nulle. En quantique il y a une proba non-nulle quelque soit la taille de la barrière mais devient très vite totalement négligeable en raison de l'exponentiel décroissance. ce qui explique que nous ne l'observons pas dans la vie de tous les jours.

Dans la partie 1.3, je pense que ça peut être bien de donner l'équation des probabilités de transmission T et de réflexion R en les ayant exprimées en fonction de E et de V_0 qui sont les grandeurs caractéristique du problème. Leur réelle définition est donné par un rapport de densité de courant de probabilité :

$$R = || \frac{\overrightarrow{j}_r}{\overrightarrow{j}_i} || \quad \text{et :} \quad T = || \frac{\overrightarrow{j}_t}{\overrightarrow{j}_i} || \tag{9}$$

Pour rappel, la densité de courant de probabilité est donnée par :

$$\overrightarrow{j}(r,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \overrightarrow{\nabla}\psi - \psi\overrightarrow{\nabla}\psi^*\right) \tag{10}$$

Nous en retenons les relations :

$$R = \frac{\frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)}\sinh^2(\rho a)}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)\sinh^2(\rho a)}} \quad \text{et :} \quad T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)\sinh^2(\rho a)}} \tag{11}$$

Nous montrons que la sommes des deux est égale à 1. En physique ondulatoire, ce résultat exprimait la conservation de l'énergie. Ici, il exprime la conservation de la probabilité de présence dans l'espace.

Enfin, nous pouvons donner une interprétation qualitative de l'effet tunnel grâce à l'inégalité d'Heisenberg. En mécanique quantique, les observables tel que l'énergie ne sont, intrinsèquement, pas déterminée de manière absolue et sont donc libre de fluctuer. Cette fluctuation d'énergie d'une particule quantique peut lui permettre d'avoir momentanément une énergie supérieur à V_0 et lui permettre ainsi d'avancer suffisamment loin pour se retrouver de l'autre coté de la barrière. La distance sur laquelle elle peut espérer se déplacer est δ. Cette image qualitative permet donc d'expliquer visuellement pourquoi la probabilité de transmission diminue lorsque la hauteur de la barrière augmente. En effet, dans ce cas, seul une fluctuation d'énergie importante permet à la particule quantique de passer au-dessus d'une barrière élevée. Ceci implique, via Heisenberg, que le temps sur lequel la fluctuation perdure est faible et la particule n'a plus le temps de traverser la barrière.

2 Application : le microscope à effet tunnel

Nous pouvons reprendre ici aussi la leçon de Bastien GUIGUE partie 3.2 en ajoutant quelques précisions :
Pour justifier que cet outil permet bien d'étudier les irrégularités sur une échelle atomique, nous pouvons donner l'ordre de grandeur de la distance caractéristique δ. Le travail d'extraction du métal valant typiquement 4eV, la valeur typique de δ est de $6 \cdot 10^{-10}$m.

Cette faible valeur impose une contrainte expérimentale pour effectuer la cartographie : il s'agit de la distance typique à laquelle nous devons placer la pointe de la surface à étudier ! À cette contrainte s'en ajoute deux autres. La première est la finesse de la pointe qui ne doit être constitué que d'un seul atome pour localiser le courant tunnel avec précision. Toujours dans ce même objectif, il faut être capable de contrôler les déplacements de la pointe et de les mesurer à mieux que 10^{-11}m près. Dans la pratique, ceci est réalisé à l'aide de trois quartz piézoélectriques (pour les 3 directions). La réalisation expérimentale est encore plus compliqué car nous avons oublier de tenir compte de certains effets comme des vibrations parasites.

Il est intéressant, si le temps le permet, de lire les questions page 1210 et leur correction page 1257 du Sanz.

Si le temps le permet en fin de leçon, nous pouvons traiter rapidement le cas de la désintégration α.

Conclusion

Nous pouvons prendre la conclusion de la leçon de Bastien GUIGUE.