

Évolution temporelle d'un système quantique à 2 niveaux.

Thomas Ramborghi

M2 FEADeP

Mars 2019

Oscillation de Rabi :

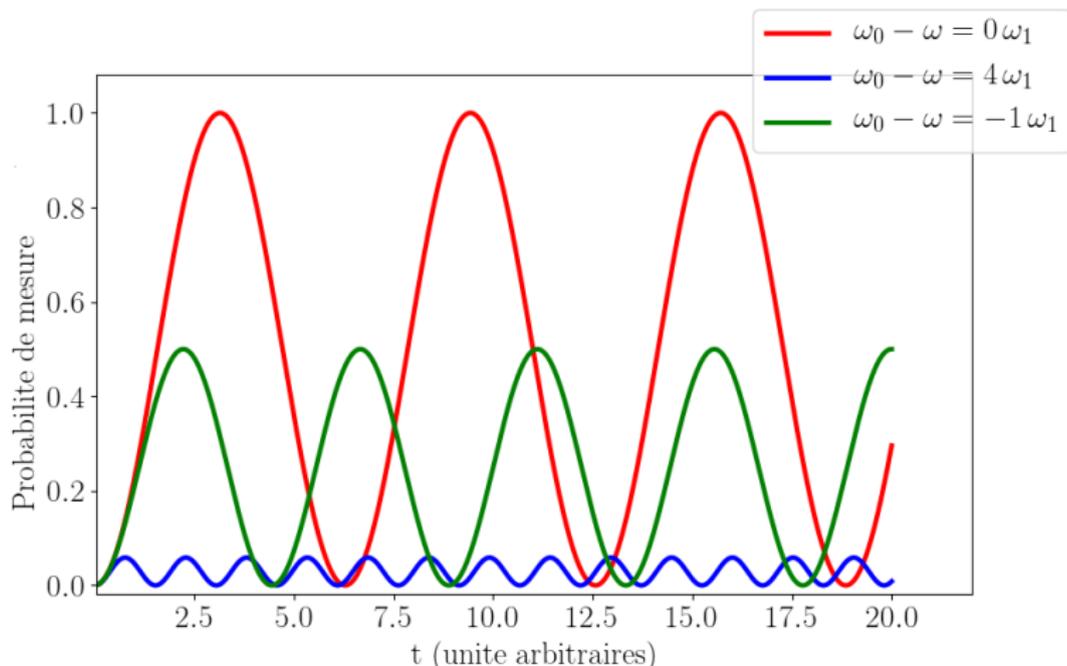


FIGURE – Évolution de la probabilité $P_{|+\rangle \rightarrow |-\rangle}(t)$ en fonction du temps pour différentes pulsations ($\omega_1 = 1$, $\omega_0 = 5$).

Phénomène de résonance :

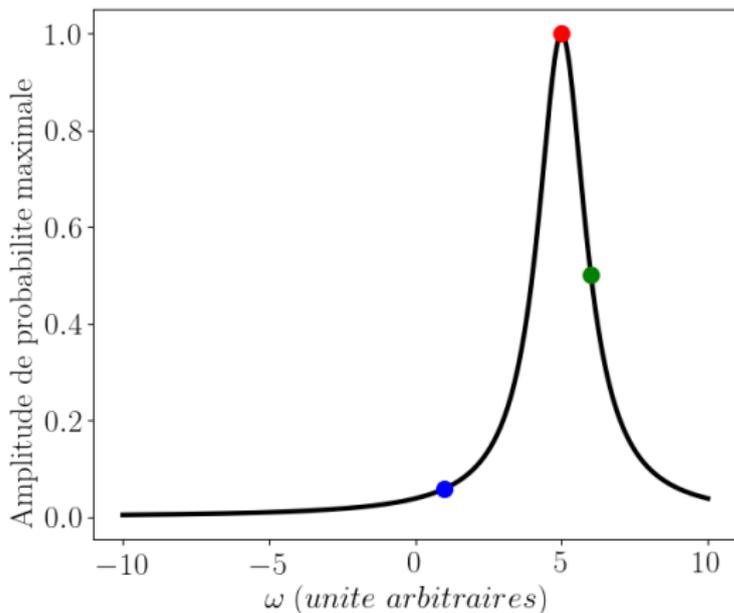


FIGURE – Amplitude de la probabilité $P_{|+\rangle \rightarrow |-\rangle}(t)$ pour différentes valeurs de ω ($\omega_1 = 1, \omega_0 = 5$).

Rappel des résultats obtenus pour une particule dans un (double) puits infini :

L'énergie associée à une particule piégée dans l'un des puits est de la forme :

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \quad \text{avec :} \quad k_n = n \frac{\pi}{a} \quad \text{et} \quad m = \frac{3m_H m_N}{3m_H + m_N} \quad (1)$$

Notons que pour chaque niveau n , l'énergie E_n est associée à 2 fonctions d'onde $\psi_n^L(x)$ et $\psi_n^R(x)$ de la forme :

$$\psi_n^R(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(k_n\left(b + \frac{a}{2} - x\right)\right) \quad \text{si} \quad x \in \left[b - \frac{a}{2}; b + \frac{a}{2}\right]$$

$$\psi_n^L(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(k_n\left(b + \frac{a}{2} + x\right)\right) \quad \text{si} \quad x \in \left[-b - \frac{a}{2}; -b + \frac{a}{2}\right]$$

$$\psi_n^L(x) = \psi_n^R(x) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

Cas du double puits de taille finie :

$$\psi_n^{A/S}(x) = A \sin(k_n^{A/S} (b + \frac{a}{2} - x)) \quad \text{si } x \in [b - \frac{a}{2}; b + \frac{a}{2}]$$

$$\psi_n^{A/S}(x) = \pm A \sin(k_n^{A/S} (b + \frac{a}{2} + x)) \quad \text{si } x \in [-b - \frac{a}{2}; -b + \frac{a}{2}]$$

$$\psi_n^{A/S}(x) = \begin{cases} B_S \cosh(q_n^S x) & \text{si } x \in [-b + \frac{a}{2}; b - \frac{a}{2}] \\ B_A \sinh(q_n^A x) & \end{cases}$$

$$\psi_n^{A/S}(x) = \psi_n^R(x) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

où $k_n^{A/S}$ sont définis comme précédemment par :

$$E_n^{A/S} = \frac{(\hbar k_n^{A/S})^2}{2m} \quad \text{et} \quad q_n^{A/S} = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E_n^{A/S})}}{\hbar}.$$

Quantification du vecteur d'onde :

$$-\frac{k_n^S}{q_n^S} \coth\left(q_n^S \left(b - \frac{a}{2}\right)\right), \tan(k_n^S a)$$

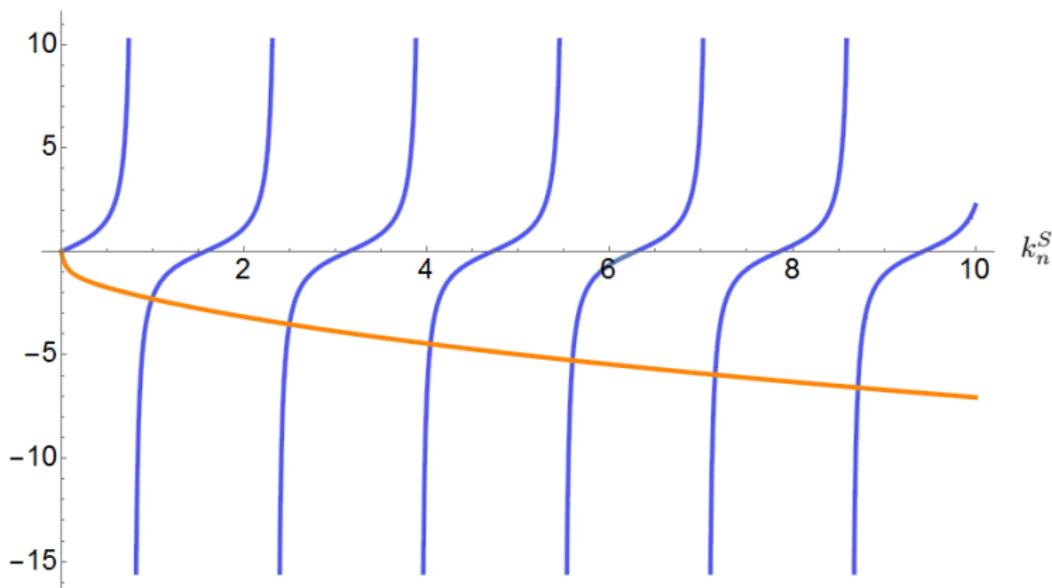


FIGURE – Résolution graphique des vecteurs d'ondes permis. Ici $b = 5$, $a = 2$

Fonctions d'onde des états stationnaires du système :

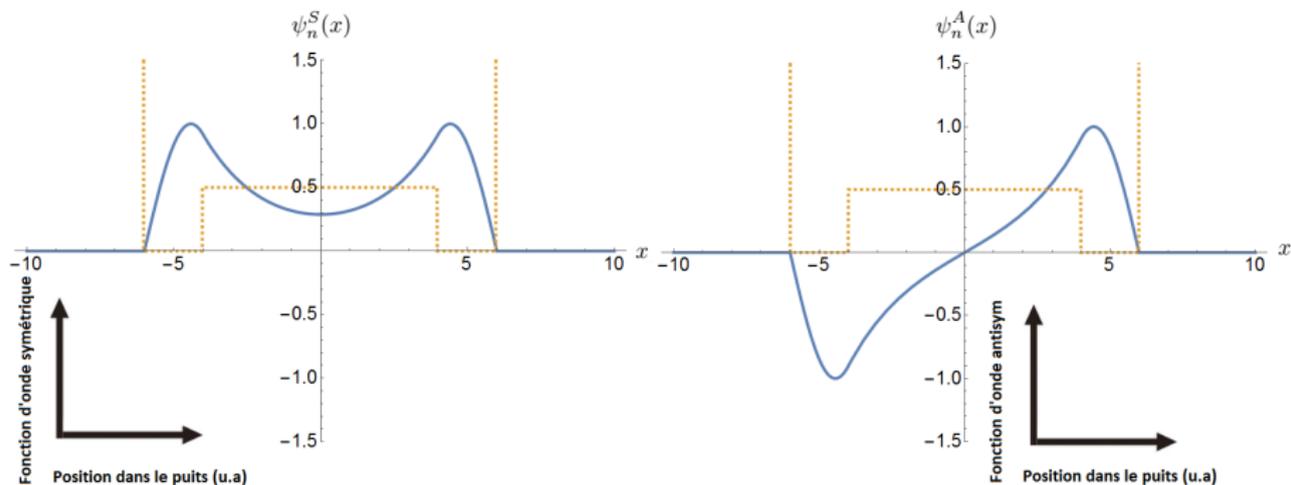


FIGURE – Évolution de la fonction d'onde symétrique (à gauche) et antisymétrique (à droite) en fonction de la position dans le puits. Ici $n = 1$, $b = 5$, $a = 2$ et $A = m = 1$.

Oscillation naturelle de la particule fictive entre les 2 puits :

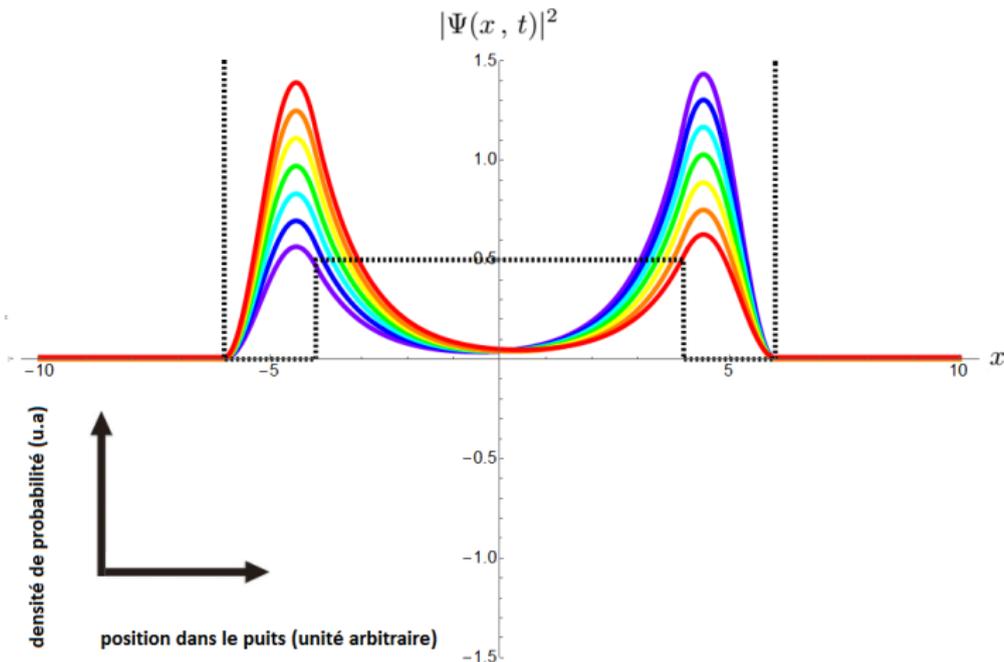


FIGURE – Densité de probabilité dans le puits à différents instant t . Les mêmes paramètres que précédemment ont été utilisés.

Conclusion :

- systèmes quantiques à 2 niveaux réels (spin $\frac{1}{2}$) vs systèmes effectifs (ammoniaque) justifier par la théorie de la perturbation
- phénomène de résonance
- oscillations de Rabi (avec forçage) vs oscillations libres (ammoniaque sans champ E) grâce à l'effet tunnel
- applications nombreuses : résonance magnétique nucléaire, maser, horloge atomique, ...

annexe :

Cadre d'étude : l'hamiltonien de la forme : $H(\lambda) = H_0 + \lambda W$ tel que :
 $H(\lambda)|\Psi(\lambda)\rangle = E(\lambda)|\Psi(\lambda)\rangle$.

On développe ensuite $E(\lambda)$ et $|\Psi(\lambda)\rangle$ en puissance de λ :

$$(H_0 + \lambda W) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |n\rangle \right) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m E^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |n\rangle \right) \quad (2)$$

et l'on développe le résultat ordre par ordre.

Cas d'un niveau non-dégénéré :

$$|\Psi_n(\lambda)\rangle = |\Psi_{n0}\rangle + \sum_{p \neq n} \sum_i \frac{\langle \Psi_p^i | W | \Psi_n \rangle}{E_n^0 - E_p^0} |\Psi_p^i\rangle + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (3)$$

$$E_n(\lambda) = E_n^0 + \langle \Psi_{n0} | W | \Psi_{n0} \rangle + \sum_{p \neq n} \sum_i \frac{(\langle \Psi_p^i | W | \Psi_n \rangle)^2}{E_n^0 - E_p^0} + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (4)$$