

LC48 - Phénomène de résonance dans différents domaines de la Physique

May 8, 2019

- Présenter l'exemple célèbre du pont de Tacoma n'est pas pertinent, sauf s'il s'agit d'effectuer une critique d'une interprétation erronée très répandue.
- 2010 : L'analyse du seul circuit RLC est très insuffisante pour cette leçon. Le phénomène de résonance ne se limite pas aux oscillateurs à un degré de liberté.
- 2008, 2007 : Le jury regrette que les cavités résonnantes soient rarement présentées.
- 2006 : L'aspect énergétique de la résonance est ignoré la plupart du temps. Trop souvent, la notion même de résonance n'est liée qu'à l'existence d'un maximum d'amplitude. Les applications dans le domaine microscopique sont rarement abordées.
- 2003 : Le candidat doit prendre soin de dégager les propriétés communes aux différents exemples présentés. Quel lien y a-t-il entre le circuit RLC et la résonance du sodium ?

Références :

- cap prepa PCSI, pour la partie I
- H prepa Ondes, pour le calcul des oscillateurs couplés
- Bup 851, JP Roux pour la corde de Melde
- Hyperfréquences, Gardiol pour le micro-onde

Niveau : L1

Contents

1	Un seul degré de liberté : Passe bande <i>RLC</i> :	3
1.1	passe-bande électrique	3
1.1.1	Équation temporelle du système :	3
1.1.2	Réponse fréquentielle	4
1.1.3	Et la résonance en tension ?	4
1.2	Étude énergétique de la résonance	5
1.2.1	Remarques su le facteur de qualité	5
1.3	Expérience :	6
1.4	Analogie électro-mécanique	7

2	Plusieurs degrés de libertés ; modes propres et cavités	7
2.1	Oscillateurs couplés	7
2.2	Corde de Melde :	8
2.3	Expérience : corde de Melde	9
2.4	Application : Micro-onde	10
3	Annexe	11
3.1	RLC fonction de transfert en tension	11
3.2	La réponse indicielle, pourquoi ça marche (en théorie) ?	12
3.3	solution de l'équation d'un ordre 2 pour un échelon	12
3.4	Cavité Fabry-Perrot	13
3.4.1	Théorie en transmission	14

Introduction

On rencontre des résonances dans différents domaines de la physique. Dans ce cours, on veut déterminer des caractéristiques communes à l'ensemble de ces phénomènes pour dégager une définition générale de la résonance¹.

1 Un seul degré de liberté : Passe bande RLC :

1.1 passe-bande électrique

Réaliser le filtre passe-bande RLC , avec $R = 100 \Omega$, $C = 100 \text{ nF}$ et $L = 0,1 \text{ H}$.

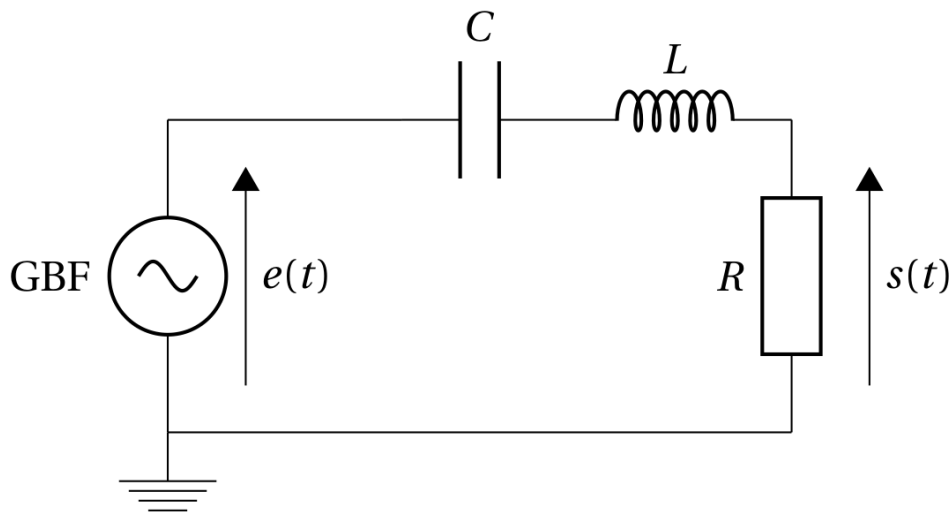


Figure 1: Circuit RLC à réaliser

1.1.1 Équation temporelle du système :

Loi des mailles :

$$s(t) + u_L + u_c = e(t) \quad (1)$$

Lois de structure :

$$s(t) = Ri(t) \quad (2)$$

$$U_L = L \frac{\partial i}{\partial t} \quad i = C \frac{\partial u_c}{\partial t} \quad (3)$$

Donc :

$$Ri(t) + L \frac{\partial i}{\partial t} + u_c = e(t) \quad (4)$$

Donc, en dérivant :

$$R \frac{\partial i}{\partial t} + L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{i}{C} = \frac{\partial e}{\partial t} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{R}{L} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{i}{LC} = \frac{1}{R} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (6)$$

¹La page [https : //fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9sonance](https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9sonance) est excellent à ce sujet.

Posons $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q = L \frac{\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. On peut alors

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{\partial i}{\partial t} + \omega_0^2 i = \frac{1}{R} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (7)$$

1.1.2 Réponse fréquentielle

On se place dans le cas d'un forçage $e(t)$ sinusoïdal.

- L'équation qui régit l'évolution du système est linéaire
- On se place en régime permanent.

Donc on peut appliquer le formalisme complexe. On propose : $\underline{i} = i_0 e^{j\omega t}$ et comme le système est linéaire, la réponse est à $\underline{E} = E_0 e^{j\omega t}$

$$j\omega E_0 e^{j\omega t} = (-\omega^2 + jR\omega + \frac{1}{C}) i_0 e^{j\omega t} \quad (8)$$

donc :

$$i_0 = \frac{j\omega}{L \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\omega \frac{R}{L} \right)} E_0 \quad (9)$$

Posons :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (10)$$

ah !

$$i_0 = \frac{j\omega}{L \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \right)} E_0 \quad (11)$$

On remarque que pour $\omega = \omega_0^2$, l'amplitude de i est **maximale** et vaut : $i_{max} = Q \sqrt{\frac{C}{L}} E_0 = \frac{1}{R} E_0$. De plus, L'intensité est en phase avec la tension d'entrée. C'est le phénomène de résonance : c'est lorsque l'amplitude de la réponse d'un système excité à une fréquence particulière ω_r passe par un maximum.

On la caractérise par son **acuité** : c'est la largeur spectrale $\Delta\omega$ pour avoir $i = i_{max}/\sqrt{2}$ rapportée à la pulsation de résonance :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \quad (12)$$

Le facteur de qualité va se retrouver dans toutes les résonances que l'on retrouvera.

1.1.3 Et la résonance en tension ?

Voir les annexes.

On peut tout à fait faire le même raisonnement pour u_C la tension aux bornes du condensateur, et aboutir à l'expression de sa norme :

$$u_C = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q} \right)^2}} E_0 \quad (13)$$

² Le fait que ce soit ω_0 est ici particulier à cet exemple.

On constate alors que u_C possède une résonance en $\omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$, à condition que $Q > \sqrt{\frac{1}{2}}$. A cause de la dépendance en Q , cette formulation de la résonance est impropre, et c'est pourquoi on se cantonnera au cas de la résonance en intensité.

1.2 Étude énergétique de la résonance

On reprend la loi des mailles :

$$e = Ri(t) + L \frac{\partial i}{\partial t} + u_c \quad (14)$$

On multiplie par i pour trouver la relation en puissance :

$$ei = Ri^2 + L \frac{\partial i}{\partial t} i + u_c i \quad (15)$$

Or, $i = C \frac{\partial u_c}{\partial t}$ donc :

$$\underbrace{ei}_{P_f} = \underbrace{Ri^2}_{P_r} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (Cu_c^2 + Li^2)}_{P_{LC}} \quad (16)$$

Où P_f est la puissance fournie par le générateur, P_r est la puissance dissipée par effet Joule et P_{LC} est la puissance stockée par la bobine et le condensateur.

En moyenne sur une période, $\langle P_{LC} \rangle = 0$ car dans le cas d'une bobine ou d'un condensateur, les tensions et courants sont déphasés de $\pm \frac{\pi}{2}$. Donc le produit ui sur une période vaut forcément 0.

Du coup, la puissance dissipée par effet joule vaut :

$$\langle P_r \rangle = R \langle i^2 \rangle = \frac{1}{2} \Re(ii^*) \quad (17)$$

Donc :

$$\langle P_r \rangle = R \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} E_0^2 \quad (18)$$

Le circuit présente une résonance en puissance. La puissance fournie au circuit par le générateur (et ensuite dissipée par effet joule) augmente drastiquement lorsque la fréquence d'excitation avoisine la fréquence propre du circuit RLC .

A la résonance, toute l'énergie injectée dans le système y est dépensée par les phénomènes dissipatifs.

On vient de voir pour un système électrique assez classique un phénomène de résonance.

1.2.1 Remarques su le facteur de qualité

On constate que plus le facteur de qualité est important, plus la résonance en intensité est piquée autour de la pulsation de résonance.

plus le facteur de qualité est grand, plus la résonance en intensité est marquée Pour un circuit LC idéal (oscillateur harmonique), le facteur de qualité est infini et la résonance ne peut exister que pour $\omega = \omega_0$. En réalité, les fils, la bobine et la capacité possèdent des résistances, et on n'est jamais dans le cas idéal.

On peut montrer que $Q = 2\omega\tau$ correspond au nombre d'oscillation pendant le temps caractéristique d'amortissement du régime transitoire.

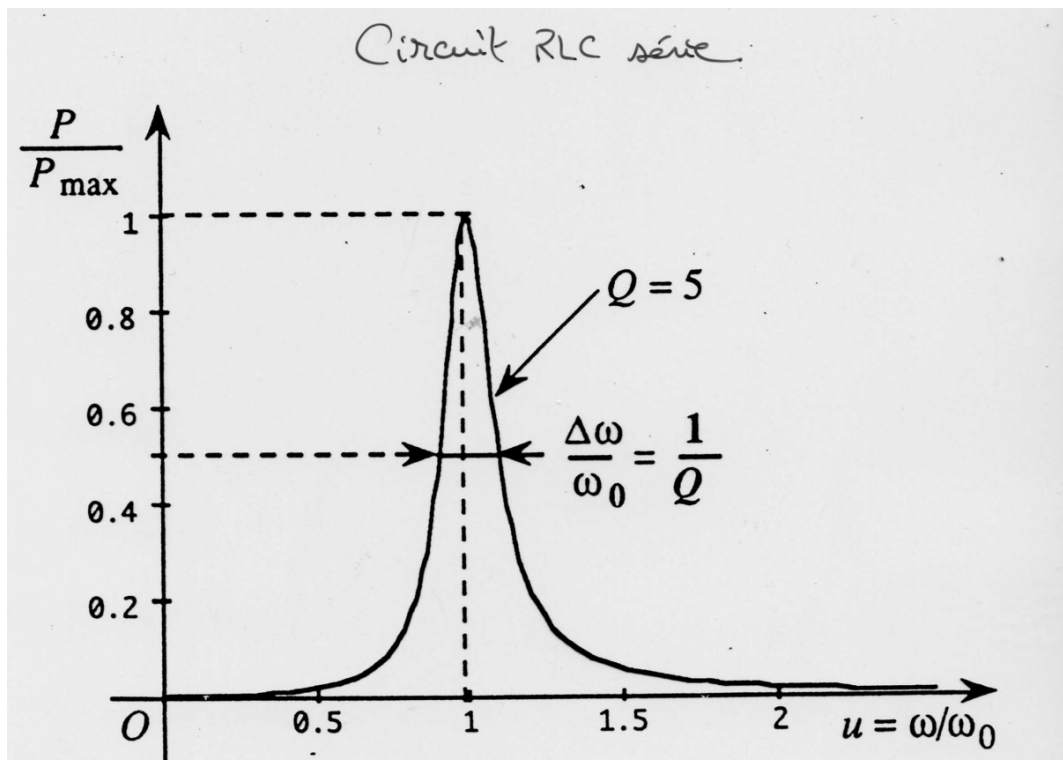


Figure 2: Amplitude de la fonction de transfert du circuit RLC (issu de *Electrocinétique et électrotechnique 1ère et 2ème année MP, PC* Farroux Renault David)

1.3 Expérience :

[Duffait] p.145-146

Reprendre le filtre passe-bande RLC , avec $R = 100 \, \Omega$, $C = 100 \, nF$ et $L = 0,1 \, H$, l'alimenter par un GBF en régime sinusoïdal (tension e).

Afficher la tension d'entrée et celle aux bornes de la résistance sur un oscilloscope.

En préparation : faire le diagramme de Bode.

Devant le passage : Mesurer la fréquence de résonance du filtre³ ($f_0 \approx 1,59 \, kHz$), ainsi que son facteur de qualité

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \quad (19)$$

où f_1 et f_2 correspondent aux limites de la bande passante du filtre $V_s(f_1) = V_s(f_2) = V = \frac{1}{\sqrt{2}} V_s(f_0)$ à déduire du diagramme de Bode. Comparer aux valeurs théoriques.

On a traité le circuit RLC . Ici, on se propose de développer une comparaison entre ce système électronique et un système mécanique.

³Une façon très précise est de mettre $e(t)$ et $s(t)$ en mode XY à l'oscilloscope. On cherche alors à voir une ligne et non plus une ellipse. En effet, à la résonance, on acquiert entre entrée et sortie un déphasage de $\pi/2$ pour un ordre 2.

1.4 Analogie électro-mécanique

On se place dans un référentiel galiléen. Intéressons-nous au comportement d'une masse m liée à un support fixe par un ressort de raideur k (il est à l'équilibre en $x = 0$, et subissant des frottements fluides de coefficient γ . La masse est soumise à une force d'excitation F suivant l'axe du ressort. Le postulat fondamental de la dynamique suivant l'axe x du ressort est :

$$m \frac{\partial}{\partial t} v = F - \gamma v - kx \quad (20)$$

Donc, en dérivant :

$$m \frac{\partial^2}{\partial t^2} v + \frac{\partial}{\partial t} \gamma v + kv = \frac{\partial}{\partial t} F \quad (21)$$

On fait le parallèle avec le circuit RLC :

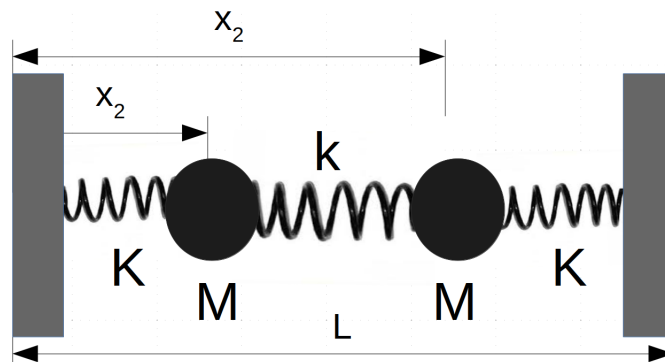
Circuit RLC	Système mécanique
Tension d'excitation e	Force excitatrice F
Intensité i	Vitesse v
Charge q	Position x
Résistance R	Coefficient de frottement fluide γ
Inductance L	Masse m
$1/\text{Capacité } 1/C$	Raideur k
$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$	$\omega_0 = 1/\sqrt{k/m}$
$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$	$Q = \frac{\sqrt{mk}}{\gamma}$

On observe donc une résonance en vitesse. Ces deux systèmes sont équivalents. On peut les traiter de la même façon grâce à cette analogie.

2 Plusieurs degrés de libertés ; modes propres et cavités

2.1 Oscillateurs couplés

Sur transparent Considérons deux masses M identiques liées à des supports fixes par des ressorts identiques de raideur K , et entre elles par un ressort de raideur k . On considère le cas sans frottement. Le calcul des amplitudes des vitesses v_1 et v_2 est fait dans le H Prepa Ondes p9 puis p17.



Les ressorts K ont une longueur à vide a_0 et le k de longueur à vide b_0 . Le premier mobile subit la force :

$$\vec{F}_1 = -K(x_1 - a_0)\vec{e}_x \quad \vec{f}_1 = k((x_2 - x_1) - b_0)\vec{e}_x \quad (22)$$

Su le deuxième, on a :

$$\vec{F}_2 = -K(L - x_2 - a_0)\vec{e}_x \quad \vec{f}_2 = -\vec{f}_1 \quad (23)$$

Si on note ψ_i le déplacement de la masse i par rapport à sa position d'équilibre :

$$\begin{cases} M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_1 = -K\psi_1 - k(\psi_1 - \psi_2) \\ M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_2 = k(\psi_1 - \psi_2) - K\psi_2 \end{cases} \quad (24)$$

Changement de fonction :

$$u = \psi_1 + \psi_2 \quad v = \psi_1 - \psi_2 \quad (25)$$

Donc :

$$\begin{cases} M \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = -Ku \\ M \frac{\partial^2}{\partial t^2} v = -(K + 2k)v \end{cases} \quad (26)$$

Posons

$$\omega_S = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \omega_A = \sqrt{\frac{K + 2k}{M}} \quad (27)$$

Si on force les oscillations du système à $F_0 \cos(\omega t)$ suivant $\vec{e}_x$, on peut montrer que :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \omega_S^2 u = \frac{F_0}{M} \cos(\omega t) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} v + \omega_A^2 v = \frac{F_0}{M} \cos(\omega t) \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \omega_S^2)u = \frac{F_0}{M} \cos(\omega t) \\ (-\omega^2 + \omega_A^2)v = \frac{F_0}{M} \cos(\omega t) \end{cases} \quad (29)$$

On voit apparaître deux fréquences de résonance. En effet, en complexe, les amplitudes u et v divergent si $\omega = \omega_{A/S}$. En réalité, il y a de la dissipation qui empêche les amplitudes de diverger.

On a vu que deux degrés de liberté (x_1, x_2) donnent lieux à deux résonances. On peut le généraliser à n degrés de liberté.

Remarque : Pour $\omega = \frac{\omega_A + \omega_S}{2}$, u s'annule. C'est utilisé dans la construction de certains bâtiments où on couple un pendule au bâtiment pour éviter les résonances qui pourraient les détruire.

2.2 Corde de Melde :

On considère maintenant une corde de Melde, déjà vue auparavant. Chaque segment infinitésimal de la corde est un oscillateur couplé aux deux segments adjacents. Dans la limite continue, la corde possède une infinité de degrés de liberté.

La corde est de longueur L et est excitée par un pot vibrant à une de ses extrémité, et fixée à un support fixe à l'autre extrémité. La

On recherche l'amplitude de vibration en tout point M de la corde. Hypothèses :

1. Il n'y a pas de frottement fluide
2. La corde est de raideur négligeable On note r et r' les coefficients de réflexion respectivement en 0 et en L . On note a l'amplitude de l'excitation au niveau du pot vibrant et $A_i(x)$

l'amplitude (complexe) en x de l'onde réfléchie i fois : (les $-r$ viennent de l'annulation sur les bords)

$$\begin{cases} \underline{A}_0(x) = a e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x} \\ \underline{A}_1(x) = -r'a e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}} e^{+j\frac{2\pi}{\lambda}x} \\ \underline{A}_2(x) = rr'a e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}} \underline{A}_0(x) \\ \underline{A}_3(x) = -rr'a e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}} \underline{A}_1(x) \\ \dots \end{cases} \quad (30)$$

Donc, comme le système est linéaire, par superposition :

$$\underline{A}_{tot} = \sum_i \underline{A}_i = a e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x} \sum_i \left(rr'e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}} \right)^i - ar'e^{+j\frac{2\pi}{\lambda}x} \sum_i \left(rr'e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}} \right)^i \quad (31)$$

donc :

$$\underline{A}_{tot} = a \left(e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x} - r'e^{+j\frac{2\pi}{\lambda}x} \right) \sum_i \left(rr'e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}} \right)^i \quad a \quad (32)$$

donc (série géométrique de raison < 1)

$$\underline{A}_{tot} = a \left(e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x} - r'e^{+j\frac{2\pi}{\lambda}x} \right) \frac{1}{1 - rr'e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}}} \quad (33)$$

On peut alors montrer que l'amplitude vaut :

$$A = |\underline{A}_{tot}|^2 = \frac{1}{2} A A^* = a^2 \frac{(1 - r')^2 + 4r' \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}(L - x) \right)}{(1 - rr')^2 + 4rr' \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}L \right)} \quad (34)$$

On a des ventres (maximas d'amplitude pour :

$$A_{max} = \frac{1}{2} A A^* = a^2 \frac{(1 - r')^2}{(1 - rr')^2 + 4rr' \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}L \right)} \quad (35)$$

Et on constate en particulier que l'amplitude est maximale pour $\sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}L \right) = 0$ ie si L est un multiple demi-entier de la longueur d'onde λ .

Pour $L = n\frac{\lambda}{2}$, on peut montrer que le facteur de qualité est :

$$Q_n = \frac{n\pi\sqrt{rr'}}{1 - rr'} \quad (36)$$

Ce type de résonateur où la dimension spatiale fixe les fréquences permises est appelé une cavité résonnante.

On l'utilise très communément en optique (cavité Fabry-Perot) pour accorder un laser ou réaliser du filtrage interférentiel, en acoustique (exemple de la flûte).

2.3 Expérience : corde de Melde

Des valeurs qui marchent : On a ici $L_{tot} = 182.9 \pm 0.2 \text{ cm}$, $L = 127.2 \pm 0.2 \text{ cm}$, $M = 202.3 \pm 0.1 \text{ g}$ (poids suspendu), $m_{corde} = 3.8 \pm 0.1 \text{ g}$. Soit une tension : $T = Mg = 1.983 \pm 0.001 \text{ N}$, et une masse linéique : $\mu \approx 2.07 \text{ g/m}$.

Matériel : pot vibrant, corde, balance, amplificateur, GBF, masse, rideau noir.

On alimente le pot vibrant avec le GBF via l'ampli (optionnel)

On cherche les fréquence pour lesquelles on observe la résonance (max d'amplitude) pour un nombre n de fuseaux différent à chaque mesure.

2.4 Application : Micro-onde

Le principe du four à micro onde est de chauffer de façon uniforme et rapide un aliment sans pour autant chauffer son environnement (four classique).

L'idée est d'exciter spécifiquement un mode de vibration de la molécule d'eau : ici le mode rotationnel. La désexcitation par les chocs moléculaire entraîne un accroissement de la température. La fréquence de résonance du mode rotationnel est de l'ordre de 100 GHz . On se place à 2.45 GHz pour éviter la résonance. En effet, plus on est proche de la résonance, plus les molécules d'eau absorbent et donc moins l'onde pénètre en profondeur dans l'aliment.

On est pas trop loin de la résonance non plus pour ne pas limiter l'absorption.

Pour obtenir une fréquence de 2.45GHz , on utilise une cavité résonnante accordée à cette fréquence, appelé magnétron.

Conclusion

Comme on l'a vu, le phénomène de résonance est présent dans de nombreux domaines de la physique. C'est parfois un phénomène que l'on souhaiterait éviter (les résonances mécanique dans la construction par exemple) On peut vouloir s'en servir comme en optique pour le filtrage interférentiel.

C'est aussi une signature caractéristique du système très utilisé en spectroscopie.

3 Annexe

3.1 RLC fonction de transfert en tension

En remplaçant dans l'équation du mouvement, on récupère la fonction de transfert $H = \frac{S}{E}$:

$$H = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{1}{1 - jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (37)$$

La pulsation de résonance est :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (38)$$

On distingue⁴ le facteur de qualité⁵ :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (40)$$

Gain et phase.

$$H = \frac{1}{1 - jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \quad (41)$$

Pour le gain, on fait le module qui est :

$$G = |H| = \frac{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (42)$$

Pour l'argument, on prend :

$$\phi = \arctan \left(\frac{\Im(H)}{\Re(H)} \right) = \arctan \left(\frac{Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{1} \right) \quad (43)$$

On remarque que pour $\omega = \omega_0$, on a un maximum d'amplitude. Le gain vaut alors 1. Quand on s'éloigne de ω_0 , l'amplitude diminue. C'est le phénomène de résonance.

On remarque également qu'à la résonance, la différence de phase entre entrée et sortie est nulle.

⁴En toute rigueur, $R_{tot} = R_L + R_{GBF} + R$. où R_L est la résistance de la bobine à mesurer en courant continu par $U_L = R_L$ et I_L . $R_{GBF} \approx 50 \Omega$, impédance de sortie du GBF.

Du coup,

$$H = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jR_{tot}C\omega} = \frac{R}{R_{tot}} \frac{1}{1 - jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (39)$$

⁵il peut s'interpréter comme le rapport de l'énergie stockée divisée par l'énergie dissipée par cycle dans l'oscillateur

3.2 La réponse indicielle, pourquoi ça marche (en théorie) ?

Soit $S(t)$ la réponse à un échelon **unitaire** $e(t) = \theta(t)$ fonction de Heaviside. On a par définition d'un système linéaire :

$$S(t) = [h * \theta](t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) \times \theta(t - \tau) d\tau \quad (44)$$

où h est la réponse impulsionnelle du système et dont la TF donne la fonction de transfert. Toute l'astuce est que

$$\frac{\partial}{\partial x} \theta(x - x_0) = \delta(x - x_0) \quad (45)$$

Du coup, calculons (on admet qu'on peut rentrer la dérivée dans l'intégrale même si t est l'une des bornes :

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) \times \frac{\partial}{\partial t} \theta(t - \tau) d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^t h(\tau) \times \delta(t - \tau) d\tau}_{=[h * \delta](t) = h(t)} \quad (46)$$

En effet, δ est l'élément neutre du produit de convolution $*$. Prenons la TF :

3.3 solution de l'équation d'un ordre 2 pour un échelon

équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \quad (47)$$

Différent cas selon le signe du discriminant ($\omega_0^2(\frac{1}{Q^2} - 4)$):

- si $Q < 1/2$: **régime aperiodique** :
deux racines simples réelles. (pour $\xi = \frac{1}{2Q}$:

$$x = e^{-\omega_0 \xi t} \times \left(A e^{\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}} + B A e^{-\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \quad (48)$$

Système fortement amorti et qui n'oscille pas.

- si $Q = 1/2$: **régime critique** :
racine double réelle :

$$x = (A + \mu t) e^{-\omega_0 \xi t} \quad (49)$$

Régime critique, le plus vite amorti : amortissement critique.

- si $Q > 1/2$: **régime pseudo-periodique** :
deux racine simples complexes conjuguées :

$$x = e^{-\omega_0 \xi t} \times \left(A \cos(\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}) + B A \sin(-\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}) \right) \quad (50)$$

Periodique de pulsation $\omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \neq \omega_0$ et faiblement amorti avec un temps typique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$

Expérience : Mise en évidence de la résistance critique

Réaliser le filtre passe-bande RLC , avec $R \approx 100 \Omega$ (boite à décade), $C = 100 \text{ nF}$ et $L = 0,1 \text{ H}$, l'alimenter par un GBF en régime sinusoïdal (tension e).

Une nouvelle fois, on envoie un échelon avec le GBF . On observe à l'oscilloscope la réponse. On fixe L et C . On fait varier R et on montre le régime pseudo-periodique (bas R) et le régime apériodique (haut R). Déterminer la résistance critique où on passe du régime pseudo-periodique au régime apériodique. La comparer à :

$$R_{tot}^{critique} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (51)$$

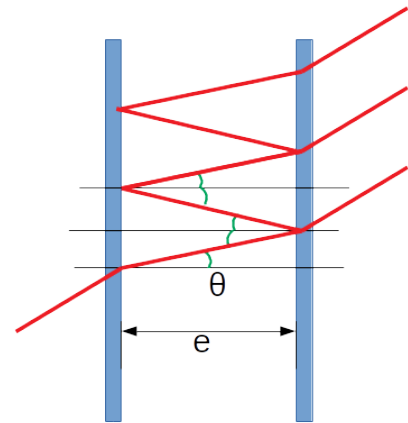
Attention, il s'agit de R plus la résistance de la bobine et l'impédance de sortie du GBF (50Ω) qu'il faudra retrancher à la valeur de R .

3.4 Cavité Fabry-Perrot

Pour le réglage, voir les annexes.

Il s'agit d'un interféromètre à ondes multiples formé par une cavité à faces parallèles. Pour que les ondes successives qui interfèrent puissent avoir des amplitudes comparables, le facteur de réflexion R sur les faces de l'appareil doit être proche de 1. Ceci permet de n'avoir de la lumière en sortie de l'appareil que dans certaines directions privilégiées, et cela avec une très grande finesse.

On distingue les cavités étalon pour lesquelles la distance e entre les lames est fixe de l'interféromètre de Fabry-Pérot équipé d'un vernier permettant de translater une lame par rapport à l'autre.



Pour les notations E_i est l'amplitude incidente.

3.4.1 Théorie en transmission

déphasage entre deux ondes successives : $\Delta\phi = k 2ne \cos\theta$

$$E_{tot} = \sum_p^{\infty} E_0 \times R e^{p\Delta\phi} = \frac{1}{1 - R e^{j\Delta\phi}} \quad (52)$$

où $E_0 = (1 - R) \times E_i$ où E_i est l'intensité entrante. Donc :

$$I = |E_{tot}|^2 = |E_i|^2 \times \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos(\Delta\phi)} \quad (53)$$

donc :

$$I = I_i \times \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\right)} \quad (54)$$

$$I = I_i \times \frac{(1 - R)^2}{1 - R)^2 + 4 R \sin^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \quad (55)$$

Donc, la transmittance :

$$T = \frac{I}{I_i} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \quad (56)$$

Ce ui ressemble à :

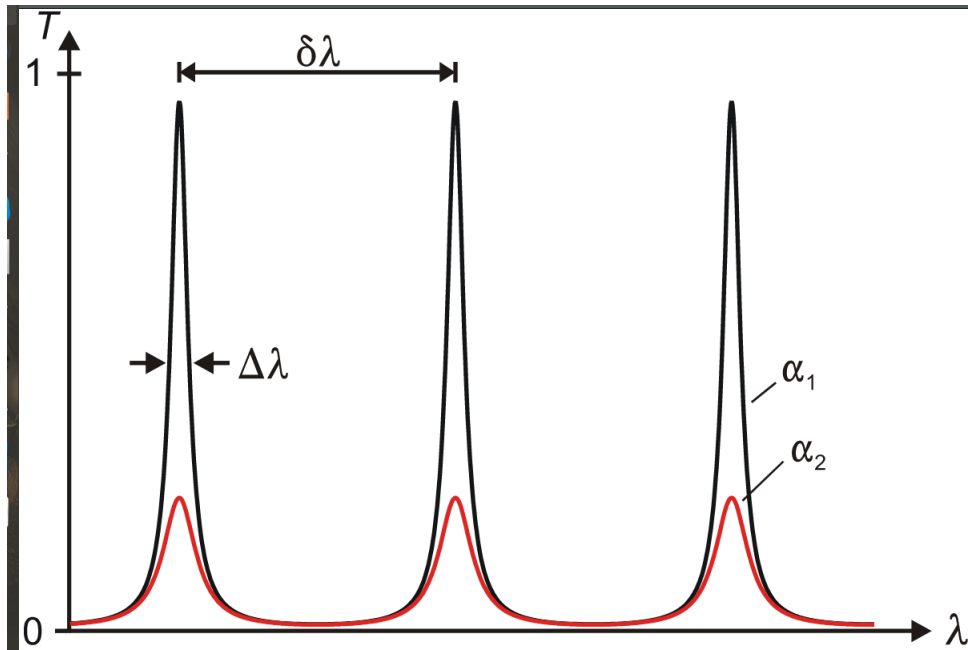


Figure 3: transmittance de la cavité (wikipedia.org, libre de droits)

On pose $\delta\lambda$ l'intervalle entre deux groupes de pics consécutifs et $\Delta\lambda$ la largeur à mi-hauteur d'un pic.

On définit la finesse :

$$F = \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda} \quad (57)$$

On comprend alors que l'interféromètre de Fabry Péroth est capable de filtrage spectral assez sélectif. Plus F est grande, plus le filtre sera sélectif.

Si les miroirs ont des réflexivités R_1 et R_2 , (en énergie) on a :

$$F = \frac{\pi (R_1 R_2)^{\frac{1}{4}}}{1 - (R_1 R_2)^{\frac{1}{2}}} \quad (58)$$

Elle peut s'exprimer en fonction de l'intervalle spectral libre **ISL** et du temps de vie d'un photon dans la cavité τ :

$$F = 2\pi\tau\mathbf{ISL} = 2\pi \times (\mathbf{Nombre d'oscillations dans la cavite}) \quad (59)$$

Le facteur de qualité d'une cavité Fabry Perrot est pour un pic à f_0 , de largeur Δf

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = F \times \frac{f_0}{\mathbf{ISL}} \quad (60)$$