

LP 49 – OSCILLATEUR; PORTRAITS DE PHASE ET NON LINÉARITÉS

7 mai 2019

Marc Lagoin (discussion et manip) & Ramborghi Thomas

Niveau : L2

Commentaires du jury

- def oscillateur et portrait de phase attendu
- mettre en évidence l'intérêt des portraits de phase

Bibliographie

✦ *Mécanique 1*, **Jean-Pierre Faroux**

✦ *Cours de physique non-linéaire*, **Therry Dauxois**

Prérequis

- Oscillateur harmonique aux petits angles
- Les lois sur le frottement de glissement

Table des matières

1	Rappel sur les résultats d'un oscillateur harmonique et introduction du portrait des phases	2
2	Oscillation du pendule d'angle initiale quelconque	2
3	Rôles des harmoniques et dépendance de la période d'oscillation	3

Introduction

1 Rappel sur les résultats d'un oscillateur harmonique et introduction du portrait des phases

Faire des dessins au tableau

On définit le plan des phases $v(x)$ dans lequel la condition initiale est un point M_0 et la solution correspondante une courbe paramétrée passant par ce point.

L'ensemble des courbes associées à l'équation différentielle donne le portrait des phases de ce système.

Regardons les propriétés pour un système général d'équation : $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, v)$ (équation Newton 1D) :

L'équation d'un pendule au petit angle $\rightarrow$ oscillateur harmonique : $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ avec : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- point d'équilibre $\rightarrow$ point pour lesquels $F(x_{eq}, 0) = 0$. Ici il s'agit de l'origine du repère.
- unicité de la solution une fois les conditions initiales données $(x_0, v_0) \rightarrow$ la trajectoire dans le plan ne se coupe pas (exception possible aux points singuliers).
- trajectoire coupe l'axe Ox à angle droit sauf aux points singuliers (d'équilibre). La tangente au point M fait un angle α avec Ox tel que : $\tan(\alpha) = -\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{m} \frac{F(x, v)}{v}$ donc en $v = 0$ tangente infinie ou $F(x, 0) = 0$
- trajectoire se referme $\rightarrow$ périodicité car même condition initiale

Solution périodique : $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ et $v(t) = -x_0 \omega \sin(\omega t)$

En multipliant l'équation par $\dot{x}$ puis en l'intégrant, on obtient : $\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\omega^2}{2} x^2 = E$

Équation paraît d'être une ellipse donc portrait de phase = ensemble d'ellipses centrées sur l'origine et d'axes Ox et Ov.

$$E = \frac{1}{2} (-x_0 \omega \sin(\omega t))^2 + \frac{\omega^2}{2} (x_0 \cos(\omega t))^2 = \frac{(x_0 \omega)^2}{2}$$

Les axes étant de longueur x_0 et $x_0 \omega$ ils sont directement liés à l'énergie.

- sens d'une trajectoire : demi-plan du haut $\rightarrow v > 0$ donc x doit croître donc déplacement vers les x positifs.
- périodicité : La périodicité du mouvement s'écrit : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ avec : $\omega = \sqrt{\frac{m}{k}}$ est donc une constante ne dépendant pas des conditions initiales. Toutes les ellipses possèdent donc la même période : c'est ce que l'on appelle l'isochronisme des petites oscillations (période indépendante de l'amplitude).

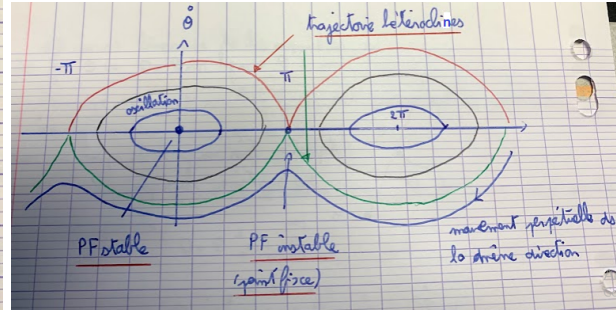
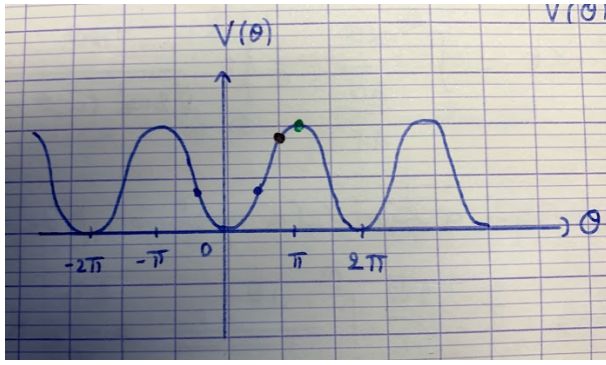
2 Oscillation du pendule d'angle initiale quelconque

Faire des dessins au tableau

Reprenons l'équation d'un pendule mais pour un angle quelconque $m l^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + m g l \sin(\theta) = 0$

$\times \frac{d\theta}{dt}$ et intégration donne : $\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + V(\theta) = E$

- Pour passer d'un puits au suivant, il faut que l'énergie cinétique devienne supérieure à l'énergie potentielle au sommet du puits $\rightarrow E > 2\omega_0^2 \rightarrow$ le pendule fait des tours complets, toujours dans le même sens.
- Pour $E < 2\omega_0^2 \rightarrow$ oscillation dans un même puits.
- $E = 2\omega_0^2 \rightarrow$ trajectoire particulière appelée hétérocline



3 Rôles des harmoniques et dépendance de la période d'oscillation

Nous nous plaçons dans le cas des petites oscillations $\rightarrow$ développement limité de $\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$

Nous réécrivons l'équation de la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1)$$

La présence de la non-linéarité est dû au terme en θ^3 . Si nous essayons de résoudre l'équation obtenue par la solution sinusoïdale de l'équation linéaire, nous obtenons un terme en $(\sin(\omega t))^3$. Il s'agit d'une harmonique d'ordre 3.

Il est bon à savoir que :

$$\sin^3(\omega t) = \frac{3}{4} \sin(\omega t) + \frac{1}{4} \sin(3\omega t)$$

Nous allons donc chercher une solution approcher sous la forme :

$$\theta = \theta_0 (\sin(\omega t) + \epsilon \sin(3\omega t)) \quad (2)$$

Où ϵ et θ_0 sont des infiniment petit d'ordre 1. Nous observons expérimentalement des oscillations. Elles sont donc décomposables en série de Fourier ; ce qui justifie le choix de la solution.

Nous écrivons les équations à l'ordre 3¹ :

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = -\omega^2 \theta_0 \sin(\omega t) - 9 \theta_0 \omega^2 \epsilon \sin(3\omega t) \quad (3)$$

$$\omega_0^2 \theta = \omega_0^2 \theta_0 \sin(\omega t) + \theta_0 \omega_0^2 \epsilon \sin(3\omega t) \quad (4)$$

$$-\frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 = -\frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 [\sin(\omega t) + \epsilon \sin(3\omega t)]^3 \approx -\frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 \left[\sin^3(\omega t) + \underbrace{3\epsilon \sin(3\omega t) \sin^2(\omega t) + \dots}_{\text{donnera ordre 1}} \right] \quad (5)$$

Donc, en réinjectant dans l'équation du mouvement :

$$\left[\omega_0^2 - \omega^2 - \theta_0^2 \frac{\omega_0^2}{8} \right] \sin(\omega t) + \left[\epsilon \omega_0^2 - 9 \epsilon \omega^2 + \theta_0^2 \frac{\omega_0^2}{24} \right] \sin(3\omega t) = 0 \quad (6)$$

Comme l'équation est valable à tous t , les coeff de $\sin(\omega t)$ et de $\sin(3\omega t)$ sont tout les 2 nuls. Le premier conduit à :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}} \quad \text{Donc} \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}}} \quad (7)$$

On a alors après DL la formule de Borda :

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad (8)$$

Nous remarquons ici que la période dépend ici de θ_0 donc de la condition initiale !

1. Il est primordial de bien détailler cette étape, c'est leur premier calcul de ce genre !

Le second nous donne :

$$\epsilon = -\frac{\theta_0^2}{24 \underbrace{\omega_0^2 - 9\omega^2}_{\omega \approx \omega_0}} \approx \frac{\theta_0^2}{192} \quad (9)$$

Qui donne l'intensité relative du pic à 3ω .

On a vu ici que les linéarités avaient une propriété spécifique intéressante : elles viennent enrichir le spectre en fréquence !