

# MP25 – MESURE DE FRÉQUENCES TEMPORELLES (DOMAINE DE L’OPTIQUE EXCLU)

20 janvier 2017

David Dumont & Camille Eloy

*Nous exigeons une diminution de la « fréquence » des  
coups de fouets ! Ça nous fait la tête comme un gros char !*  
ITINERIS

## Bibliographie

|                                                      |                                                                                     |
|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| ↗ <i>Expériences d’électronique</i> , <b>Duffait</b> | → Fréquencemètre                                                                    |
| ↗ <i>Physique expérimentale</i> , <b>Jolidon</b>     | → Oscillateurs couplés, Détection synchrone (effet Doppler)                         |
| ↗ <i>BUP 867</i> , <b>Duffait</b>                    | → Théorie des pendules couplés (et quelques éléments sur le protocole expérimental) |

## Table des matières

|          |                                                  |          |
|----------|--------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Mesure par comptage</b>                       | <b>1</b> |
| 1.1      | Comptage à l’aide d’un chronomètre . . . . .     | 1        |
| 1.2      | Principe du fréquencemètre . . . . .             | 2        |
| 1.3      | Mesure d’un signal réel . . . . .                | 3        |
| <b>2</b> | <b>Analyse spectrale</b>                         | <b>3</b> |
| 2.1      | Étude théorique . . . . .                        | 3        |
| 2.2      | Mesure des caractéristiques du montage . . . . . | 4        |
| 2.3      | Mesure des fréquences propres . . . . .          | 4        |
| <b>3</b> | <b>Détection synchrone</b>                       | <b>5</b> |
| 3.1      | Effet Doppler et ordres de grandeur . . . . .    | 5        |
| 3.2      | Principe de la mesure . . . . .                  | 5        |
| 3.3      | Résultats expérimentaux . . . . .                | 6        |

## Introduction

Une fréquence est une grandeur physique caractérisant, dans le cas d’un signal physique périodique, le nombre de répétition d’un phénomène par seconde. On l’exprime en Hertz (Hz). Cette notion est généralisable aux signaux quelconques, par l’analyse de Fourier.

La mesure de fréquences est primordiale en physique, car les fréquences caractérisent les systèmes étudiés. Un système linéaire invariant temporellement est par exemple entièrement déterminé par ses conditions aux limites et ses fréquences propres.

L’objectif de ce montage est de présenter plusieurs méthodes de mesure de fréquences temporelles, en tâchant d’analyser les avantages et inconvénients de ces méthodes.

## 1 Mesure par comptage

Une mesure de la fréquence d’un signal périodique peut s’effectuer en appliquant naïvement la définition de cette grandeur : il suffit de compter le nombre d’occurrence du phénomène par seconde.

### 1.1 Comptage à l’aide d’un chronomètre

Pour les faibles fréquences, i.e. de l’ordre du Hertz, un simple comptage « à la main »<sup>1</sup> peut suffire. Considérons par exemple un pendule simple, de longueur  $L$ . En notant  $g$  l’accélération de pesanteur terrestre, la fréquence des faibles oscillations est

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (1)$$

---

1. Comprendre : « à la paf ».

## ☕ Mesure de la fréquence d'oscillation d'un pendule

🚩 Yolo

⌚ 5 min

On mesure la durée nécessaire pour observer 10 oscillations à l'aide d'un chronomètre (qui constitue notre base de temps). On considère que la constante de la pesanteur est parfaitement connue et on a mesuré en préparation la longueur  $L = 54 \pm 1 \text{ cm}$  du pendule. Il en découle que

$$f_{th} = 0.678 \pm 0.006 \text{ Hz} \quad \text{avec} \quad \Delta f_{th} = \frac{\Delta L}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{L^3}}. \quad (2)$$

On déduit la fréquence et son erreur via les relations

$$f_{mes} = \frac{1}{T_{mes}} \quad \text{et} \quad \Delta f_{mes} = \frac{\Delta T_{mes}}{T_{mes}^2}. \quad (3)$$

L'inconvénient de cette méthode est clair : elle est limitée aux fréquences de l'ordre du Hertz, et par la précision de nous. Il est par exemple impossible aux pauvres humains que nous sommes de compter le nombre d'oscillations qu'effectue un diapason, au pif un La 440 Hz, pendant une seconde<sup>2</sup>. Étudions donc une version automatisée du comptage, le frérencemètre.

## 1.2 Principe du frérencemètre

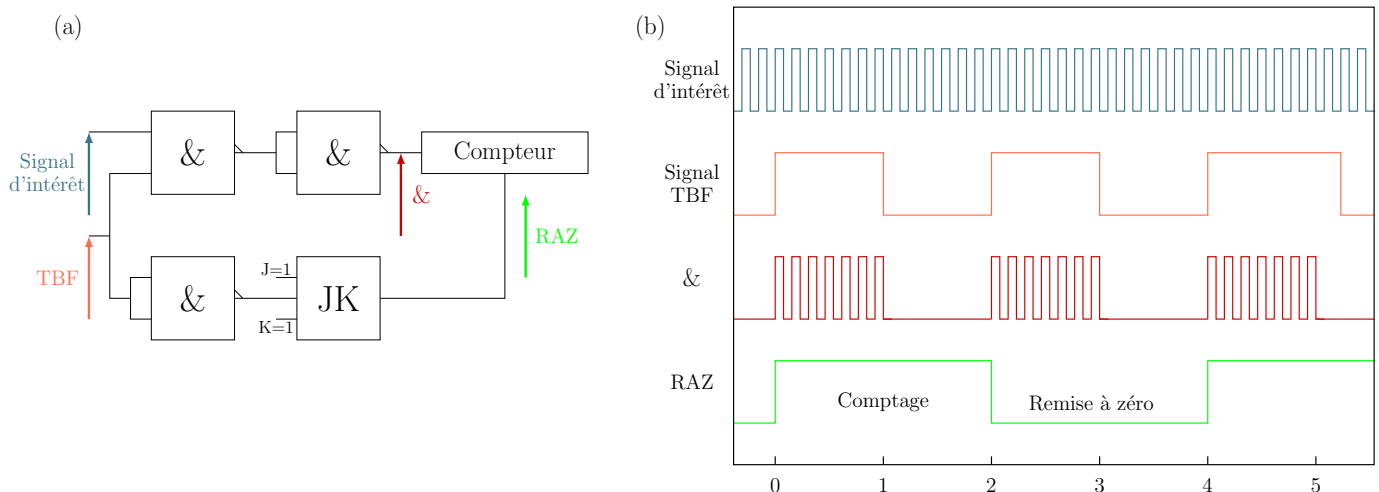
Le frérencemètre est une version électronique, et automatisée, de la méthode par comptage. Elle est basée sur l'utilisation de portes logiques et permet de mesurer la fréquence (éventuellement grande) d'un signal crêteau 0-5 V (dit TTL).

## ☕ Mesure de la fréquence d'oscillation d'un pendule

🚩 Duffait

⌚ 10 min

On utilise le boîtier P42.49 « Principe du frérencemètre ». Il fait un peu boîte noire, il est donc nécessaire de détailler la fonction de chaque élément du circuit. Le signal TBF est la référence de temps, c'est un crêteau de fréquence 500 mHz. En le couplant au signal d'intérêt sur une porte logique &, on crée un signal périodique, reproduisant toutes les deux secondes le signal d'intérêt pendant une seconde (signal « & » sur la Figure 1). C'est ce signal dont on va compter le nombre de fronts montants afin d'obtenir la fréquence. Afin de gérer l'affichage des compteurs P70.19, on utilise une bascule JK créant un signal crêteau de période 4s, assurant le comptage pendant 2s, puis la remise à zéro. Pour mesurer des fréquences au delà de 99 Hz, on utilise des compteurs mis en série grâce à la sortie dépassement.



**Fig. 1** (a) Montage du frérencemètre. (b) Résultats à l'oscilloscope.

Pour mesurer des signaux réels avec ce frérencemètre, il faut pouvoir retranscrire les signaux en crêteaux TTL. C'est ce que nous faisons maintenant, dans le but de mesurer la fréquence d'oscillation d'un diapason.

<sup>2</sup>. Sauf les gens badass qui ont l'oreille absolue, mais nous mettons en doute la notion de « comptage » pour une telle mesure.

### 1.3 Mesure d'un signal réel

Afin de le rendre mesurable à l'aide du précédent appareil, nous allons convertir le signal sinusoïdal d'un diapason en signal TTL. On utilise pour cela un comparateur à hystérésis et une diode de redressement.

#### 🔥 Conversion d'un signal sinusoïdal en TTL

🔥 YOLO

⊖ 5 min

Le comparateur à hystérésis permet d'obtenir un signal crête à crête  $\pm 15V$  de même fréquence que le signal sinusoïdal. On redresse ensuite ce signal avec une diode, et on le restreint à 5V à l'aide d'un pont diviseur de tension. L'amplificateur opérationnel de sortie assure l'adaptation d'impédance avec le fréquencemètre. Pour le choix des résistances, il suffit que le rapport  $R_1/(R_1 + R_2)$  soit petit devant 15 et que  $R_3 \simeq 2R_4$ .

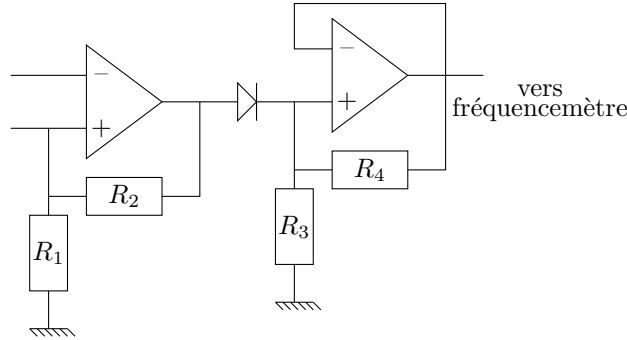


Fig. 2

On mesure ainsi la fréquence du diapason. La valeur affichée par le compteur fluctue d'un à deux Hertz, d'où une incertitude faible pour un signal de 440 Hz. Le compteur compte (sans blague?) seulement les fronts montants. Selon la nature du premier front (montant ou descendant) atteint pendant la période de comptage, le compteur peut se tromper d'une unité ce qui explique les fluctuations. Les fréquencemètres commerciaux ont quant à eux une précision bien plus élevée, jusqu'à quelques Hz sur 40kHz pour le fréquencemètre P69.6.

La méthode par comptage permet ainsi des mesures précises de fréquence pour des signaux monochromatiques euh monofréquentiels. Le fréquencemètre n'est cependant pas utilisable pour les signaux plus riches. Pour ce genre de signaux, on va utiliser l'analyse harmonique.

## 2 Analyse spectrale

L'analyse de Fourier permet de décomposer les signaux en une somme (éventuellement continue) de signaux harmoniques. On peut l'utiliser afin de mesurer les fréquences des modes propres. Étudions le cas d'une chaîne d'oscillateurs couplés. On considère le dispositif présenté en Figure 3, composé de quatre masses  $m$ , chacune suspendue à un fil de longueur  $L$ . Ces pendules sont couplées par des ressorts de raideur  $k$ .

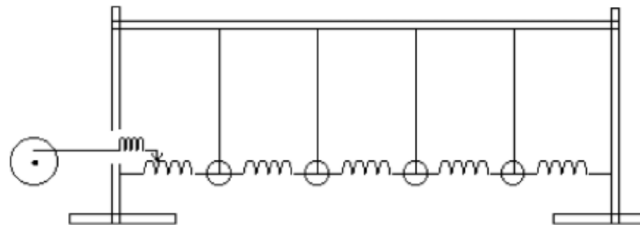


Fig. 3 Schéma du dispositif expérimental, tiré de l'article de Duffait dans le BUP 867.

### 2.1 Étude théorique

L'étude du principe fondamental de la dynamique pour ce système, très bien faite dans le Jolidon<sup>®</sup> et de l'article de Duffait (avec deux méthodes différentes, s'il vous plaît), prédit l'existence de quatre modes propres, décrits par la relation de dispersion

$$\forall p \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \omega_p^2 = \frac{g}{L} + \frac{4k}{m} \sin^2 \left( \frac{p\pi}{10} \right). \quad (4)$$

On voit dans cette expression l'influence des deux types d'oscillations : le pendule simple est représenté par la pulsation  $\sqrt{\frac{g}{L}}$ , qui serait le « mode »  $p = 0$ , en l'absence de couplage. L'influence des ressorts, caractérisée par la pulsation  $\sqrt{\frac{k}{m}}$ , augmente avec  $p$ . Le mode  $p = 4$  est ainsi celui nécessitant le plus d'énergie pour être excité<sup>3</sup>. On va tâcher de vérifier ces prédictions.

## 2.2 Mesure des caractéristiques du montage

Les quatre masses ne sont pas toutes identiques et varient entre 321 g et 329 g. On va ici attribuer à chaque masse la valeur moyenne de l'ensemble et on choisit le plus grand écart en masse comme incertitude-type, d'où

$$m = (323.4 \pm 7) \text{ g.} \quad (5)$$

La longueur des pendules est estimée par des mesures à la règle, en considérant une erreur systématique de 1 cm :

$$L = (33 \pm 1) \text{ cm.} \quad (6)$$

On peut enfin estimer  $k$  en mesurant la fréquence des oscillations d'une masse seule, en fixant les autres. La fréquence ainsi mesurée est  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$ , car la masse est reliée à deux ressorts. On obtient

$$k = (122 \pm 5) \text{ kg.s}^{-2}. \quad (7)$$

On peut à présent estimer les pulsations propres données par l'étude théorique, présentées en Figure 4(b).

**On peut se passer du calcul de la masse moyenne  $m$  et de  $k$  en ne s'intéressant qu'au rapport  $\frac{k}{m}$  que l'on mesure via la fréquence des oscillations d'une seule masselote. Le tracé du graphe suivant permet de confirmer la valeur obtenue. C'est ce qui est présenté car cela évite de nombreux calculs d'erreurs pénibles...**

## 2.3 Mesure des fréquences propres

### Mesure des fréquences propres

 Jolidon

 10 min

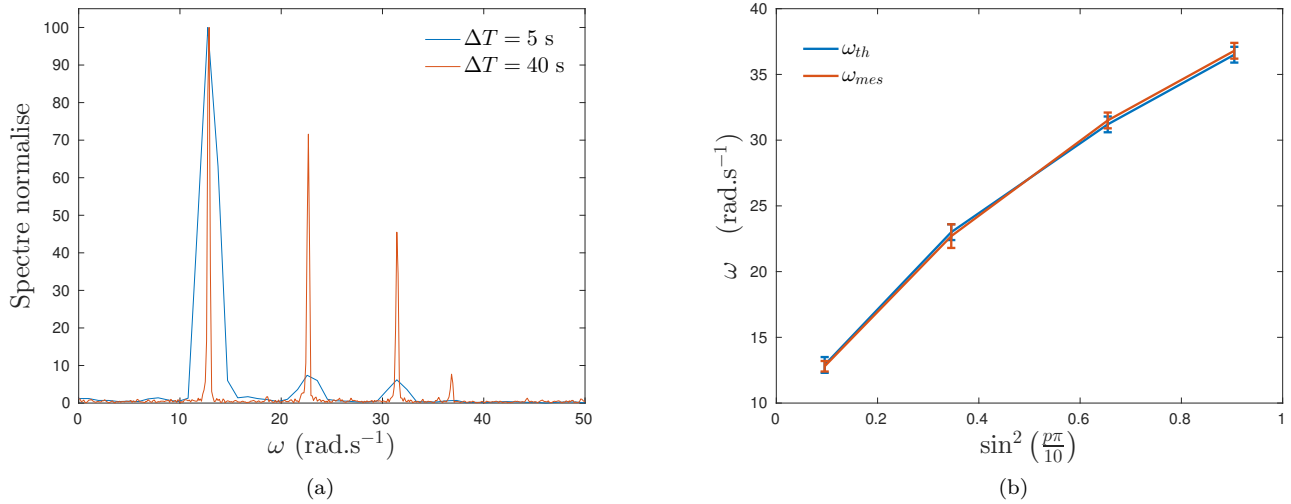
On utilise le dispositif P79.22 et la caméra VIDEOCOM P17.14, avec le logiciel adéquat (VideoComMouvement). Ce dernier enregistre directement les positions des quatre masses, et propose une fonction transformée de Fourier. On initie le mouvement avec une chiquenaude<sup>a</sup> de Dirac et on l'enregistre sur une quarantaine de seconde. Il faut que l'excitation soit suffisamment énergétique pour que tous les modes soient visibles dans le spectre de Fourier.

<sup>a</sup>. Pichenette.

L'utilisation de la transformée de Fourier est l'occasion de discuter du lien entre le temps sur lequel on calcule cette transformée et la résolution du spectre. On peut calculer deux fois le spectre d'un des signaux mesurés, sur deux intervalles de temps de taille différente. La largeur à demi-hauteur des pics obtenus est fortement affectée (Figure 4(a)). La résolution en fréquence est en fait  $\Delta f = 1/T$ , avec  $T$  la largeur de l'intervalle sur lequel on fait le calcul. Dans le cas idéal d'une mesure sur un temps infini, le pic devient une delta de Dirac. D'autres sources d'élargissement rentrent bien sûr en compte, notamment les dissipations. Elles sont ici négligeables, surtout que le but ici est de montrer les caractéristiques de la transformée de Fourier. On assimilera donc ici l'élargissement  $\Delta f$  à l'incertitude sur notre mesure.

Les résultats sont présentés en Figure 4(b). On remarque également sur la Figure 4(a) que l'amplitude des pics correspondant aux modes diminue avec l'ordre du mode, ce qui confirme notre analyse précédente. L'accord avec la théorie est excellent. On a ainsi montré que l'analyse spectrale permet d'extraire les fréquences propres d'un signal de possédant *a priori* aucune périodicité. Passons maintenant à la dernière expérience, qui met en évidence une méthode pour détecter une petite variation de fréquence dans un signal haute fréquence.

3. On peut ici faire, en somme, une analogie avec un ensemble de spins plongé dans un champ magnétique homogène. L'état d'énergie le plus stable est celui d'alignement des spins avec le champ, c'est celui qui minimise l'énergie de couplage. Ici c'est pareil, le mode le plus excité est celui de plus faible couplage. Analogie fructueuse, n'est-il pas ?



**Fig. 4** (a) Spectre de Fourier d'un signal expérimental, pour deux intervalles de calcul de taille différente. (b) Résultats expérimentaux.

### 3 Détection synchrone

#### 3.1 Effet Doppler et ordres de grandeur

Dans les exemples traités précédemment, nous avons détaillé des méthodes de mesure de fréquence. Dans tous les cas, la fréquence d'intérêt était dans la gamme mesurable par notre appareil<sup>4</sup>. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas. Considérons le cas d'une mesure de vitesse par effet Doppler. Soit une source émettant une onde monochromatique de fréquence  $f$ , immobile, et un récepteur en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse  $v$ . La fréquence de l'onde reçue est alors

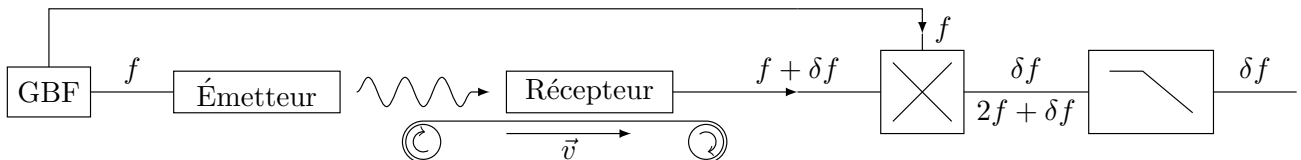
$$f' = f \left( 1 - \frac{v}{c_s} \right), \quad (8)$$

où  $c_s$  est la vitesse de l'onde considérée, du son ici. Ainsi, en mesurant le décalage en fréquence on peut mesurer la vitesse  $v$  du récepteur<sup>5</sup>.

Étudions simplement quelques ordres de grandeur, afin d'interroger la faisabilité de l'expérience. Dans le cas du dispositif que l'on va utiliser, la vitesse du récepteur est de l'ordre de  $v = 20 \text{ cm.s}^{-1}$  et la fréquence est  $f = 40 \text{ kHz}$ . La vitesse du son dans l'air étant de l'ordre de  $c_s = 350 \text{ m.s}^{-1}$ , le décalage en fréquence est  $\delta f \simeq 20 \text{ Hz}$ . On cherche donc à déterminer un décalage de 20 Hz dans un signal de 40 kHz. Afin d'isoler le signal d'intérêt, on va utiliser la détection synchrone.

#### 3.2 Principe de la mesure

L'astuce consiste à multiplier le signal mesuré, de fréquence  $f + \delta f$ , par le signal d'émission, de fréquence  $f$ . On obtient ainsi une somme de deux signaux harmoniques, de fréquence respective  $2f + \delta f$  et  $\delta f$ . Le premier signal étant haute fréquence, on peut isoler le second à l'aide d'un filtre passe-bas soigneusement choisi. Le dispositif est présenté en Figure 5.



**Fig. 5** Dispositif de la mesure du décalage en fréquence de l'effet Doppler par détection synchrone.

4. Puisqu'on est malins.

5. Pratique pour renflouer les caisses de l'État. Et c'est plus simple que de lutter contre l'évasion fiscale.

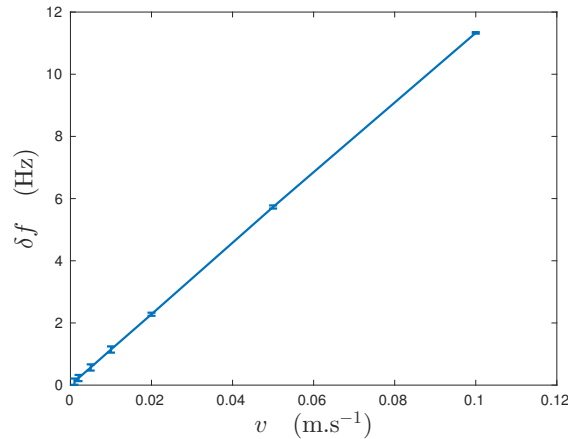
### 3.3 Résultats expérimentaux

#### Mesure du décalage Doppler par détection synchrone

 Jolidon

 10 min

On utilise la table traçante P40.3 et les émetteurs ultrasons P73.23. On peut ainsi mesurer  $\delta f$ , grâce à une transformée de Fourier en sortie du montage de détection synchrone, pour huit vitesses différentes, et tracer une belle droite d'étalonnage, présentée en Figure 6. Pour ce qui est de l'estimation des erreurs, la notice de la table traçante nous donne 0.5% d'erreur sur les vitesses, et l'erreur sur la fréquence est celle que nous fournis la transformée de Fourier.



**Fig. 6** Résultats expérimentaux.

On a ainsi pu, grâce à la détection synchrone, isoler et mesurer la variation de fréquence  $\delta f$ , qui n'était pas mesurable car cachée dans un signal de plus haute fréquence.

## Conclusion

Au cours de ce montage, nous avons montré qu'il était possible de mesurer des fréquences temporelles de plusieurs façons et avec plus ou moins de précisions. Pour un système monofréquentiel, l'utilisation d'un fréquencemètre est satisfaisante mais ce dernier se révèle tout à fait inefficace pour des signaux multifréquentiels. Il est alors de bon goût d'utiliser l'analyse spectrale pour séparer les différences fréquences propres. Par ailleurs, si l'on souhaite mesurer une fréquence que ne se trouve pas dans le domaine d'utilisation de notre appareil de mesure, on peut souvent s'y ramener avec une détection synchrone.

Les fréquences propres d'un système peuvent aussi être mesurées en exploitant les effets de la résonance. Lorsqu'un système est excité à sa fréquence propre, sa réponse est maximale. Ainsi, on peut conclure le montage par un récital a capela face à une cavité de diapason : la cavité entrera en résonance dès que vous émettrez un La pur (pour le diapason à 440 Hz...) pour le plus grand plaisir du jury !!

## Questions et commentaires