

# MP28 – INSTABILITÉS ET PHÉNOMÈNES NON-LINÉAIRES

1<sup>er</sup> mai 2019

Lagoin Marc & Ramborghi Thomas

## Commentaires du jury

- Il ne faut pas se limiter à l'étude le non isochronisme des oscillations du pendule pesant.
- Il est intéressant d'illustrer quelques phénomènes caractéristiques des systèmes non-linéaires dans différents domaines de la physique. Il est possible d'illustrer la pluralité des positions d'équilibre, le phénomène de bifurcation, l'enrichissement spectral, le ralentissement critique, ect ...
- Il faut bien traiter les deux aspects présent dans l'intitulé du montage et ne pas se limiter aux phénomènes non linéaires.

## Bibliographie

♣ *Physique expérimentale*, **Jolidon p 478** Pour l'expérience sur le pendule pesant.

## Expériences



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction des non-linéarités dans le cas bien (plutôt mal) connu du pendule pesant</b>	<b>2</b>
1.1	Positionnement du problème . . . . .	2
1.2	Calibration du pendule . . . . .	3
1.3	Étude aux petites oscillations . . . . .	3
1.4	Étude aux grandes oscillations . . . . .	3
1.4.1	Vérification de la formule de Borga . . . . .	4
1.4.2	Portrait de phase . . . . .	4
1.4.3	Enrichissement spectral . . . . .	4
1.4.4	Pendules double-puits . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Non-linéarité en électronique avec l'oscillateur de Van der Pol</b>	<b>5</b>
2.1	Présentation générale du montage et de ses différents régimes . . . . .	5
2.2	Oscillations quasi-sinusoïdales . . . . .	6
2.2.1	Mise en évidence de la bifurcation . . . . .	6
2.2.2	Visualisation des trajectoires dans l'espace des phases . . . . .	7
2.2.3	Détermination des coefficients $\alpha$ et $\beta$ de l'élément non-linéaire . . . . .	7
2.3	Oscillations de relaxation . . . . .	7

## Introduction

Nous avons l'habitude en physique de restreindre nos études au domaine où une linéarisation est possible. Nous traitons par exemple systématiquement la résolution du pendule dans le cas des petites oscillations. Mais si nous y réfléchissons bien, il s'agit d'une forte restriction par rapport à l'étude globale. En effet, cette linéarité très pratique pour l'étude des systèmes est en réalité souvent une approximation, qui ne décrit plus parfaitement le système dès que l'on s'éloigne du point d'équilibre stable : par exemple nous constatons à la résonance dans un RLC que l'amplitude des oscillations n'est pas infini comme le prédit le calcul linéaire. En effet les équations linéaires sont souvent obtenues par DL à l'ordre 2 des équations plus générales. En s'éloignant du point d'équilibre il faut rajouter des termes d'ordre supérieur dans le DL. Les équations perdent alors leur linéarité. C'est ce que nous allons étudier dans la première partie avec un oscillateur mécanique. Nous modéliserons ensuite un système non-linéaire en électronique grâce à l'oscillateur de Van der Pol.

## 1 Introduction des non-linéarités dans le cas bien (plutôt mal) connu du pendule pesant

### 1.1 Positionnement du problème

Le premier système que nous allons étudier est un pendule constitué d'une tige métallique de moment d'inertie  $J_0$  fixé en son centre à un axe de rotation. On fixe une masselotte de masse  $M$  à une distance  $L$  de l'axe de rotation, et on note  $\theta$  l'angle du pendule avec la verticale. Un schéma du système est donné en figure 1.

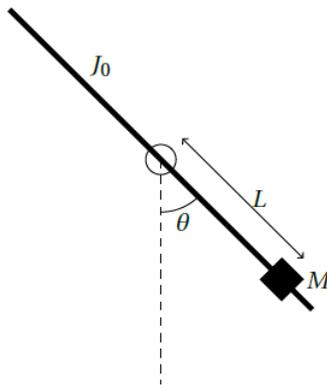


FIGURE 1 – Schéma de notre pendule nous donnant les notations adoptées par la suite. Ce schéma est pris du poly de Jérémy Ferrand.

Appliquons le théorème du moment cinétique à notre pendule. Nous obtenons :

$$(J_0 + M L^2) \frac{d^2}{dt^2} \theta + M g L \sin(\theta) = 0 \quad (1)$$

Que nous réécrivons :

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{M g L}{J_0 + M L^2}} \quad \text{la pulsation propre.} \quad (2)$$

Nous considérerons que les frottements sont négligeables. Par conséquent l'énergie mécanique se conserve et prend la forme :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} (J_0 + M L^2) \left( \frac{d}{dt} \theta \right)^2 + M g L (1 - \cos(\theta)) \quad (3)$$

Nous rappelons que dans l'étude aux faibles amplitudes d'oscillation, la période est indépendante de l'amplitude imposé initialement : nous parlons d'isochronisme. En effet la période  $T_0$  est donnée par :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + M L^2}{M g L}} \quad (4)$$

Dans ce cas général, nous avons une perte de cet isochronisme. Le calcul est déjà détaillé dans la leçon *LP 49 – Oscillateur ; portraits de phase et non linéarités* et nous le referons pas ici. Il est cependant important de l'avoir en tête. La période d'oscillation est donnée par la formule de Borga :

$$T \approx T_0 \left( 1 + \frac{1}{16} \theta_{ini}^2 + \frac{11}{3072} \theta_{ini}^4 \right) \quad (5)$$

Elle dépend donc de l'angle donnée initialement au pendule (si l'on considère la vitesse initiale nulle). De plus la solution recherchée est de la forme (le DL du sinus nous indique où chercher) :

$$\theta = \theta_0 (\sin(\omega t) + \epsilon \sin(3\omega t)) \quad (6)$$

ce qui indique un enrichissement du spectre notamment l'apparition d'une composante à la pulsation  $3\omega$ .

## 1.2 Calibration du pendule

Cette partie doit être préparée lors de la préparation car elle ne présente pas de phénomène répondant au sujet. Il s'agit cependant d'une étape importante qu'il faut mentionner. Nous allons utiliser un pendule grand angle équipé d'un potentiomètre et d'un circuit amplificateur dont la tension en sortie  $U$  est proportionnelle à l'angle  $\theta$  du pendule.

### Calibration du pendule



☉ en préparation

Relions le potentiomètre du pendule à son boîtier, et alimentons le par le boîtier prévu à cet effet. Mesurons la tension  $U$  en sortie du boîtier avec un voltmètre en mode continu. Puis, réglons le gain sur 1 environ ( ne pas activer pas le filtre passe-bas), et réglons le zéro afin que la position  $\theta \approx 0^\circ$  corresponde à une tension quasi-nulle. Il apparaît alors une discontinuité dans la tension pour  $\theta$  proche de  $180^\circ$  (si ce n'est pas le cas, faire un demi-tour avec la tige).

Pour différents angles  $\theta$  (tous les  $10^\circ$  par exemple) mesurés avec le rapporteur en papier, mesurons la tension  $U$  en sortie, puis réalisons une régression affine dans la gamme de réponse linéaire afin de remonter aux coefficients entre ces paramètres. Nous remarquons que la tension  $U$  évolue linéairement avec l'angle  $\theta$  sur une large gamme (jusqu'à  $\pm 120^\circ$  au moins).

## 1.3 Étude aux petites oscillations

Cette partie doit également être réalisée en préparation. L'objectif de l'étude au petite oscillation est de remonter au moment d'inertie  $J_0$  de la tige.

### Étude aux petits angles



☉ en préparation

Nous accrochons une masse sur la tige du pendule (la masselotte de masse  $m = 149\text{g}$  par exemple). Pour différentes distances  $L$  par rapport à l'axe de rotation, nous lançons le pendule avec une amplitude faible ( $15^\circ$  maximum) pour rester dans l'approximation des petits angles, puis nous mesurons la pulsation  $\omega_0$  des oscillations avec un oscilloscope en mode Défilement.

Nous Traçons  $\frac{MgL}{\omega_0^2}$  en fonction de  $L^2$  afin de remonter à l'ordonnée à l'origine  $J_0$  par régression linéaire. Nous nous attendons à trouver  $J_0 \approx 2,8 \cdot 10^{-3} \text{kg.m}^2$ , en accord avec la valeur indiquée sur la notice.

## 1.4 Étude aux grandes oscillations

Nous allons utiliser les dissipations énergétiques du pendule afin de balayer toutes les amplitudes d'oscillations au cours d'une même acquisition. Cette prise de mesure va servir pour toutes les manip de cette sous-partie. Donc il faut faire ça bien !

## Étude aux grands angles



⊖ 5 minutes

Fixons la masselotte à une distance  $L = 20\text{cm}$  par exemple, et laisser le système évoluer à partir d'une amplitude initiale importante ( $120^\circ$  par exemple). Nous acquérons la tension sur Latis-Pro pendant plusieurs minutes, avec une période d'échantillonnage de 10 ms, jusqu'à l'arrêt des oscillations.

Nous convertissons la tension  $U$  en angle  $\theta$  (en radian) avec la Feuille de Calculs en utilisant l'étalonnage précédent.

### 1.4.1 Vérification de la formule de Borga

Pour vérifier rapidement la loi de Borga, il est possible d'utiliser une méthode automatisée tel que celle réalisée en TP. Cependant les incertitudes sont plus élevées et nous choisirons ici d'effectuer une méthode point par point. La méthode rapide est détaillée en annexe.



#### Vérification de la formule de Borga



⊖ 3 minutes

Ici seul 1 ou 2 points seront réalisées devant le jury et les autres seront fait en préparation. Voir Jolidon p482 pour le détail de la manip et le traitement des incertitudes.

### 1.4.2 Portrait de phase

Nous allons représenter le portrait de phase du système dans l'espace  $\{\theta, \frac{d\theta}{dt}\}$



#### Portrait de phase



⊖ 1 minute

Nous représentons le portrait de phase  $\frac{d\theta}{dt}$  de l'expérience. On peut représenter cette courbe pour quelques oscillations seulement à différents instants de l'expérience pour bien observer son évolution.

Pour les petites amplitudes, la trajectoire dans l'espace des phases est proche d'une ellipse. Si nous exprimons l'équation 3 pour de petite oscillation, nous trouvons :

$$E_m = \frac{1}{2} (J_0 + M L^2) \left(\frac{d}{dt}\theta\right)^2 + M g L \frac{\theta}{2} \quad (7)$$

qui est bien l'équation d'une ellipse.

Elle se déforme pour des amplitudes plus importantes. D'un point de vue global, la trajectoire n'est pas constitué d'ellipses mais d'une spirale qui converge progressivement vers le centre, à cause des frottements que subit le système.

### 1.4.3 Enrichissement spectral



#### Enrichissement spectral



⊖ 1 minute

Nous calculons la FFT du signal sur une période de quelques oscillations (Sélection de périodes/Manuelle) dans le cas de petites amplitudes, puis pour des amplitudes importantes.

Il y a ici un compromis à faire lors du choix de la plage de temps sur laquelle nous effectuons la FFT. Il doit avoir assez de période pour avoir une bonne précision (freq de résolution est inversement proportionnelle au temps total d'acquisition ; mais pas trop pour ne pas trop ressentir les pertes par frottement.

Lorsque l'amplitude des oscillations est importante, nous voyons l'apparition d'une composante de pulsation  $3\omega$  dans le spectre, en plus de la composante fondamentale. Elle n'apparaît pas pour des petites oscillations. Par ailleurs le pic du fondamental est shifté aux grandes amplitudes.

### 1.4.4 Pendules double-puits

#### Mise en évidence d'une bifurcation fourche



⊖ 3 minute

L'expérience à réaliser est bien détaillée dans le Jolidon p 487 et nous n'allons donc pas beaucoup détailler cette partie.

L'idée est de placer 2 aimants pour former un potentiel double-puits. Nous pouvons mettre en avant, qu'à partir de 2 positions initiales proches, nous obtenons une fois une trajectoire qui finit dans le puit de gauche et une fois dans le puit de droite. Je pense que le traçage des portraits de phases est intéressant car il est très visuel et montre la puissance de ce graphique. En effet, malgré que le potentiel exacte créée par les 2 aimants soit difficile à être déterminé, les surfaces isoénergétiques obtenues nous permettent d'en extraire des informations.

## 2 Non-linéarité en électronique avec l'oscillateur de Van der Pol

### 2.1 Présentation générale du montage et de ses différents régimes

Le schéma général de notre montage est donné en figure 2. Décortiquons-le par étapes afin d'obtenir l'équation régissant son fonctionnement.

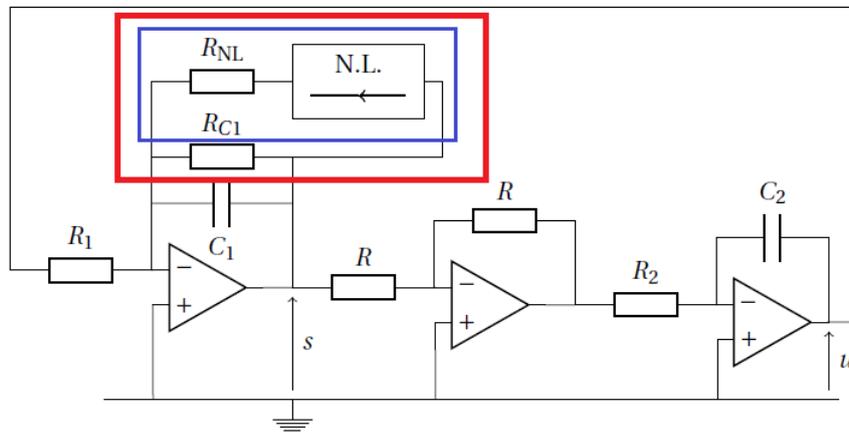


FIGURE 2 – Schéma de notre pendule nous donnant les notations adoptées par la suite. Ce schéma est pris du poly de Jérémy Ferrand.

- Commençons par étudier le circuit en omettant la partie encadré en rouge. Elle est composée de 2 intégrateurs qui sandwich un suiveur inverseur (ce dernier est là pour apporter un signe moins) avec une boucle de rétroaction. Avec les mains, nous avons l'intégration de l'intégration d'une source qui est renvoyer à la source par rétroaction. L'équation s'écrit :

$$\frac{d^2}{dt^2} V_S + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} V_S = 0 \quad (8)$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique non amorti.

- Nous passons au circuit complet omettant la partie du circuit contenu dans le rectangle bleu. Nous rajoutons d'une résistance dans le circuit. Elle se traduit par un terme d'amortissement (dissipation). L'équation prend ainsi la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2} V_S + \frac{1}{R_{C1} C_1} \frac{d}{dt} V_S + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} V_S = 0 \quad (9)$$

- Finalement, nous ajoutons une résistance et un circuit non-linéaire. Ce dernier possède la caractéristique  $V_S = \alpha e + \beta e^3$ . Pour plus d'information sur ce circuit, une sous-partie en annexe lui est dédiée. Nous obtenons alors l'équation finale suivante :

$$\frac{d^2}{dt^2} V_S + \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_{C1}} + \frac{\alpha}{R_{NL}} \right) \left( 1 + \frac{V_S^2}{\alpha R_{C1} + R_{NL}} \right) \frac{d}{dt} V_S + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} V_S = 0 \quad (10)$$

Nous reconnaissons l'équation de Van der Pol :

$$\frac{d^2}{dt^2} V_S - \epsilon \omega_0 \left( 1 - \left( \frac{V_S}{V_{S0}} \right)^2 \right) \frac{d}{dt} V_S + \omega_0^2 V_S = 0 \quad (11)$$

$$\text{où} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad ; \quad V_{S0} = \sqrt{-\frac{\alpha R_{C1} + R_{NL}}{3\beta R_{C1}}} \quad ; \quad \epsilon = -\sqrt{\frac{R_1 R_2 C_2}{C_1}} \frac{\alpha R_{C1} + R_{NL}}{R_{NL} R_{C1}} \quad (12)$$

La dynamique du système va dépendre de la valeur prise par  $\epsilon$  et en particulier de son signe. Plusieurs cas de figure :

- \* Si  $\epsilon < 0$  : la dynamique de l'oscillateur dépend des conditions initiales. En considérant que l'oscillateur est initialement au repos, le point de l'espace des phases  $\{V_S = 0; \frac{d}{dt} V_S = 0\}$  est stable et attracteur, l'oscillateur ne démarre pas.
- \* Si  $\epsilon > 0$  : lorsque  $V_S(t) < V_{S0}$ , l'amortissement est négatif et  $V_S(t)$  croît. A l'inverse lorsque  $V_S(t) > V_{S0}$ , l'amortissement est positif et  $V_S(t)$  décroît, d'où l'apparition d'oscillations dans le circuit. La forme de ces oscillations dépend de la valeur de  $\epsilon$ .
  - ◇ Pour  $\epsilon \ll 1$ , l'importance du terme non-linéaire est très faible dans l'équation, et les oscillations seront quasi-sinusoidales. Le circuit se comporte alors comme un oscillateur quasi-sinusoidal.
  - ◇ Lorsque  $\epsilon$  croit, les non-linéarités deviennent de plus en plus importantes. Le circuit se comporte alors comme un oscillateur à relaxation. On peut montrer que la période des oscillations devient proportionnelle à  $\frac{\epsilon}{\omega_0}$  lorsque  $\epsilon \gg 1$ .

## 2.2 Oscillations quasi-sinusoidales

Nous réalisons l'oscillateur de Van der Pol présenté figure 2, à partir de 3 AO, des résistances  $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $R_1 = R_2 = 10\text{k}\Omega$  et les 2 condensateurs de capacité  $C_1 = C_2 = 0,1\mu\text{F}$ . Nous ajoutons la résistance  $R_{C1} = 100\text{k}\Omega$  et une résistance variable pour  $R_{NL}$ . Pour l'élément non-linéaire nous allons utiliser un boitier tout fait. Il est composé des résistances  $R_{1n} = R_{3n} = 6,2\text{k}\Omega$ ,  $R_{2n} = 82\text{k}\Omega$  et  $R_{4n} = 2\text{k}\Omega$ . Le facteur d'échelle de ses multiplicateurs est  $K = 0,1\text{V}^{-1}$ . Il faut faire attention au sens du boitier et le positionner comme sur le schéma : l'entrée est à droite et la sortie est à gauche. Les deux boitiers doivent être alimentés par leur alimentation spécifique.

### 2.2.1 Mise en évidence de la bifurcation

Pour notre circuit, la condition de démarrage des oscillations  $\epsilon \geq 0$  s'écrit :  $R_{NL} \leq \alpha R_{C1}$ .

#### Mise en évidence de la bifurcation



⊖ 1 minute

Nous affichons les tensions  $s$  et  $u$  sur un oscilloscope. Pour  $R_{NL} > 40\text{k}\Omega$ , nous devons observer l'absence d'oscillation dans le circuit. Nous réduisons alors progressivement  $R_{NL}$  jusqu'à observer la naissance des oscillations aux alentours de  $R_{NL} = -\alpha R_{C1} \approx 35\text{k}\Omega$  (dans la pratique, cette valeur peut légèrement fluctuer).

## 2.2.2 Visualisation des trajectoires dans l'espace des phases

Nous avons la relation :  $s(t) = R_2 C_2 \frac{d}{dt} u(t)$ . Par conséquent, si nous utilisons le mode XY de l'oscilloscope avec les variables  $s(t)$  et  $u(t)$  nous obtenons des trajectoire analogue à celle de l'espace de phases  $\{s(t); \frac{d}{dt} s(t)\}$ .

### Visualisation des trajectoires dans l'espace des phases



⊖ 2 minute

Observons la trajectoire du système en utilisant le mode XY de l'oscilloscope. Nous obtenons un cercle pour  $R_{NL}$  légèrement inférieur à  $-\alpha R_{C1}$ , et un point fixe pour  $R_{NL} > -\alpha R_{C1}$ .

Pour visualiser la disparition des oscillations dans l'espace des phases, nous pouvons utiliser le mode Persistance de l'oscilloscope (bouton Display, puis sélectionner Persistance 1, et appuyer sur Effacer Persistance pour remettre à zéro).

- Partir du cercle limite avec  $R_{NL}$  légèrement inférieur à  $-\alpha R_{C1}$ , nous ouvrons la branche du circuit contenant l'élément non-linéaire (ce qui correspond à  $R_{NL} \rightarrow \infty$ ) pour voir la convergence des oscillations vers le point fixe.
- Nous pouvons voir de façon analogue la convergence depuis une condition initiale éloignée. Pour cela, nous court-circuitons l'entrée inverseuse du premier AO en la reliant à la masse par un fil, puis nous retirons ce fil pour observer la convergence depuis la condition initiale (correspondante à la saturation des AO) vers le cercle.

## 2.2.3 Détermination des coefficients $\alpha$ et $\beta$ de l'élément non-linéaire

Nous considérons que les oscillations dans le circuit restent quasi-sinusoidales tant que  $0 < \epsilon < 0,05$ , ce qui équivaut à  $23,1\text{k}\Omega < R_{NL} < 34,7\text{k}\Omega$ . Dans ce domaine de restriction la fréquence des oscillations (est constante) et l'amplitude crête à crête sont données par :

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad \text{et :} \quad V_{CC} = 4v_{S0} = 4\sqrt{-\frac{\alpha}{3\beta} - \frac{R_{NL}}{3\beta R_{C1}}} \quad (13)$$

### Caractérisation de l'élément non-linéaire



⊖ 1 minute

Pour différentes valeurs de  $R_{NL}$  comprises entre  $23,1\text{k}\Omega$  et  $34,7\text{k}\Omega$  (nous effectuerons seulement 1 ou 2 points devant le jury), nous mesurons l'amplitude crête-à-crête  $V_{CC}$  des oscillations sur l'oscilloscope, puis nous traçons  $V_{CC}^2$  en fonction de  $R_{NL}$  et afin de remonter aux coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  par régression linéaire.

## 2.3 Oscillations de relaxation

Maintenant, si nous diminuons la valeur de  $R_{NL}$ ,  $\epsilon$  croit, et les oscillations quasi-sinusoidales tendent progressivement vers des oscillations de relaxation plus riches en harmoniques.

### Mise en évidence de la déformation du cycle



⊖ 30 seconde

Réduisons progressivement  $R_{NL}$  de  $20\text{k}\Omega$  jusqu'à quelques centaines de ohms, et observons la transition vers les oscillations de relaxation (il ne faut pas descendre trop bas car dans la pratique les oscillations disparaissent à cause de la saturation des composants). Si nous passons en mode XY sur l'oscilloscope, le cycle limite se déforme.

Nous pouvons montrer que lorsque  $\epsilon \gg 1$ , la période des oscillations de relaxation  $T$  tend vers  $(3 - \ln 4) \frac{\epsilon}{\omega_0}$ .

### Convergence de la période d'oscillation vers une valeur limite

✍ 1 minute

Pour différentes valeurs de  $R_{NL}$ , nous mesurons la période des oscillations  $T$  et calculons  $\epsilon$  grâce à la formule 12. Nous traçons  $T$  en fonction de  $\epsilon$  (seulement 1 ou 2 points devant le jury, le reste en préparation), puis nous superposons la droite d'équation  $T = (3 - \ln 4) \frac{\epsilon}{\omega_0}$  pour observer la convergence vers cette droite.

## Conclusion

Nous avons vu au cours de cette leçon que la physique linéaire se retrouvait de partout même dans le bien connu oscillateur harmonique si nous voulions sortir du cas restrictif des petites oscillations. Nous avons également vu que des instabilités pouvaient apparaître. Ces dernières ne sont pas liées à la non-linéarité du système comme nous le voyons dans le cas du pendule dans un champ magnétique de potentiel double-puits. Ce dernier exemple et l'étude de l'oscillateur de Van der Pol ont montré que les portraits de phase permettent une illustration visuelle des évolutions énergétiques de système dont la description analytique serait compliquée voir impossible.

## Annexe

### Méthode automatique pour Borga

Pour tracer l'évolution de la période en fonction de l'amplitude d'oscillations, nous allons réaliser un traitement de quelques lignes permettant de repérer les positions des maxima de  $\theta(t)$  et de mesurer les périodes d'oscillations correspondantes.

Avec la Feuille de Calcul de Latis-Pro :

- lisser la courbe et la centrer autour de zéro :  $\text{thetaL} = \text{Lissage}(\text{theta}) - \text{Moy}(\text{theta})$
- détecter l'enveloppe des amplitudes d'oscillations, c'est-à-dire les maxima locaux supérieurs à 0,1 radian par exemple :  $\text{Env} = \text{CreteMaxi}(\text{thetaL}; 0.1)$
- repérer les temps de passage par zéro :  $\text{Tpas} = \text{Seuil}(\text{thetaL}; 0; 1)$
- créer un vecteur rampe pour dériver les variables :  $n = \text{Rampe}(1; 10000; 10000)$
- calculer la période entre deux passages par zéro en dérivant :  $\text{Tper} = \text{Deriv}(\text{Tpas}; n)$

### Formule de Borga

✍ 1 minute

Nous représentons la période  $T_{per}$  en fonction de l'amplitude des oscillations  $Env$ , puis réalisons une modélisation de la forme  $T_{er} = T_0 * (1 + a * Env^2 + b * Env^4)$  en faisant glisser la fonction tracée. Il faut parfois aider la modélisation à converger en donnant des valeurs pour les coefficients proches de ceux attendus.

## Étude de l'élément non-linéaire de l'oscillateur de Van der Pol

Nous allons nous intéresser dans cette annexe à l'élément non-linéaire présent dans l'oscillateur de Van der Pol. Un schéma de ce dernier est donné en figure 3.

L'étude de cette étude va se ramener à l'étude à l'étude d'un amplificateur différentiel dont un schéma pris sur wikipédia est donné en figure 4 ainsi que 2 multiplieurs .

Nous allons que l'amplificateur opérationnel soit parfait. Dans ce cas nous pouvons écrire  $i^+ = i^- = 0$  ainsi que considérer que  $V^+ = V^-$ .

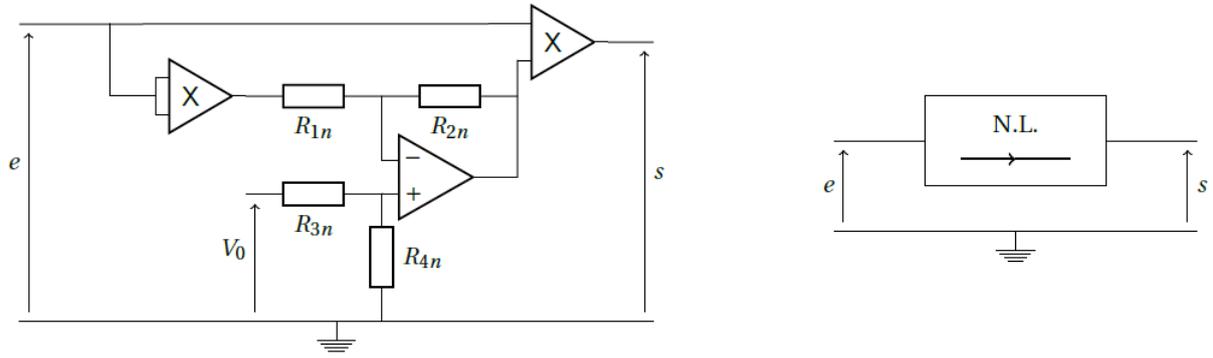


FIGURE 3 – Schéma de l’élément non-linéaire présent dans l’oscillateur de Van der Pol. Ce schéma est pris du poly de Jérémy Ferrand.

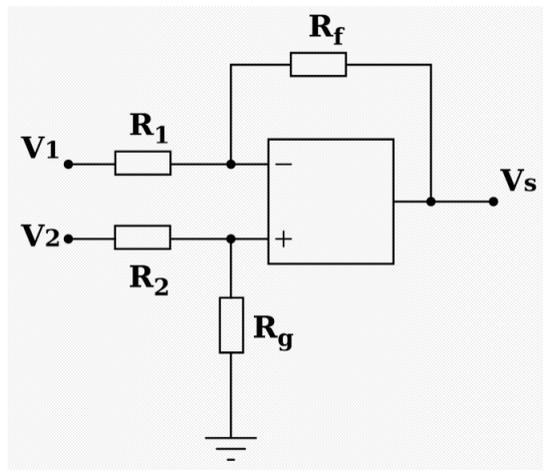


FIGURE 4 – Schéma de l’amplificateur différentiel. Ce schéma est pris sur wikipédia.

Nous déterminons  $V^+$  en remarquant qu’il y a un pont diviseur de tension. D’où :

$$V^+ = \frac{R_g}{R_2 + R_g} V_2 \tag{14}$$

La tension  $V^-$  est obtenu à l’aide du théorème de Millman :

$$V^- = \frac{\frac{V_s}{R_f} + \frac{V_1}{R_1}}{\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_1}} = \frac{V_1 R_f + V_s R_1}{R_1 + R_f} \tag{15}$$

En égalisant les 2 tensions et après quelques simplifications (que nous pouvons retrouver sur wikipédia) nous finissons par obtenir :

$$V_s = \frac{R_1 + R_f}{R_2 + R_g} \frac{R_g}{R_1} V_2 - \frac{R_f}{R_1} V_1 \tag{16}$$

Un multiplieur est un composé qui, à partir d’entrée  $U_1$  et  $U_2$  fournis en sortie une tension  $U_s$  reliées par la relation :

$$U_s = K U_1 U_2 \tag{17}$$

Ainsi, à la sortie du multiplieur de gauche, nous avons une sortie égale à  $K e^2$  qui correspond à  $V_1$  dans le calcul de l’amplificateur opérationnel.  $V_2$  est égale à la tension  $V_0$ ,  $R_f = R_{2n}$ ,  $R_2 = R_{3n}$ ,  $R_g = R_{4n}$  et  $R_1 = R_{1n}$ . Avec ce nouveau jeu de variable, la tension en sortie de l’amplificateur, qui correspondra à l’une des entrée du multiplieur de droite, est :

$$V_s = \frac{R_{1n} + R_{2n}}{R_{3n} + R_{4n}} \frac{R_{4n}}{R_{1n}} V_0 - \frac{R_{2n}}{R_{1n}} K e^2 \tag{18}$$

La seconde entrée de ce multiplicateur (je ne sais pas pourquoi mais il est en config inverseur) est la tension  $e$ . Nous obtenons finalement la tension en sortie du montage non-linéaire :

$$\begin{aligned} V_s &= - \frac{R_{1n} + R_{2n}}{R_{3n} + R_{4n}} \frac{R_{4n}}{R_{1n}} V_0 e + \frac{R_{2n}}{R_{1n}} K e^3 \\ &= \alpha e + \beta e^3 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une caractéristique polynomiale cubique et donc un système non-linéaire. Notons qu'il est possible de modifier  $\alpha$  par l'intermédiaire de  $V_0$ .