MP31 - Résonance

May 24, 2019

- 2014, 2015, 2016 Le lien qui existe entre la largeur de la résonance d'un oscillateur et la durée du régime transitoire est souvent ignoré par les candidats. Des phénomènes non linéaires ou paramétriques pourraient également être abordés.
- 2011, 2012 La résonance ne se limite pas à l'étude du circuit RLC. Les critères de détermination expérimentale de la fréquence de résonance ne sont pas toujours pertinents. La notion de facteur de qualité ou un équivalent est trop souvent absente.
- 2008 Le phénomène de résonance n'apparaît pas qu'en électricité. En outre, le circuit RLC est souvent mal connu. Le jury apprécierait de voir des résonances dans d'autres domaines de la physique, ainsi que des facteurs de qualité importants.
- 2006 La résonance n'est pas une amplification. L'influence de l'amortissement est souvent négligée.
- 2004 L'étude de la phase est trop souvent absente de ces montages alors qu'elle fournit des relations complémentaires non redondantes à celle de l'amplitude.

Références :

- Article en ligne : Robert Chabbal. V. - Qualité des lames et couches réfléchissantes pour le Fabry-Perot - Finesselimite d'un Fabry-Perot formé de lames imparfaites. J. Phys. Radium, 1958, 19 (3), pp.295-300.
- Jolidon - Physique expérimentale p207 - pour l'étude des modes longitudinaux de la cavité laser.

Contents

1 Un seul degré de liberté : 3

1.1 passe-bande électrique 3

1.1.1 Théorie : 3

1.1.2 Experience : Tracé du diagramme de Bode 4

1.2 Système diapason + boite de résonance 5

1.2.1 Caractérisation de la décroissance de l'amplitude 5

1.2.2 Expérience 6

1.2.3 Réflexions et conséquences 6

2 Plusieurs degrés de libertés ; modes propres et cavités **7**
2.1 Corde de Melde : 7
2.1.1 Description du dispositif 7
2.1.2 Détermination de modes propres 8
2.2 Cavité Fabry-Perrot 9
2.2.1 Théorie en transmission 9
2.2.2 Expérience : Finesse et facteur de qualité d'une cavité laser 11

Introduction

On rencontre des résonances dans différents domaines de la physique. Dans ce montage caractéristiques communes à l'ensemble de ces phénomènes pour dégager une définition générale de la résonance[1].

1 Un seul degré de liberté :

1.1 passe-bande électrique

[Duffait] p.145-146

C'est un circuit linéaire avec un faible facteur de qualité Q et un seul degré de liberté : l'intensité.

1.1.1 Théorie :

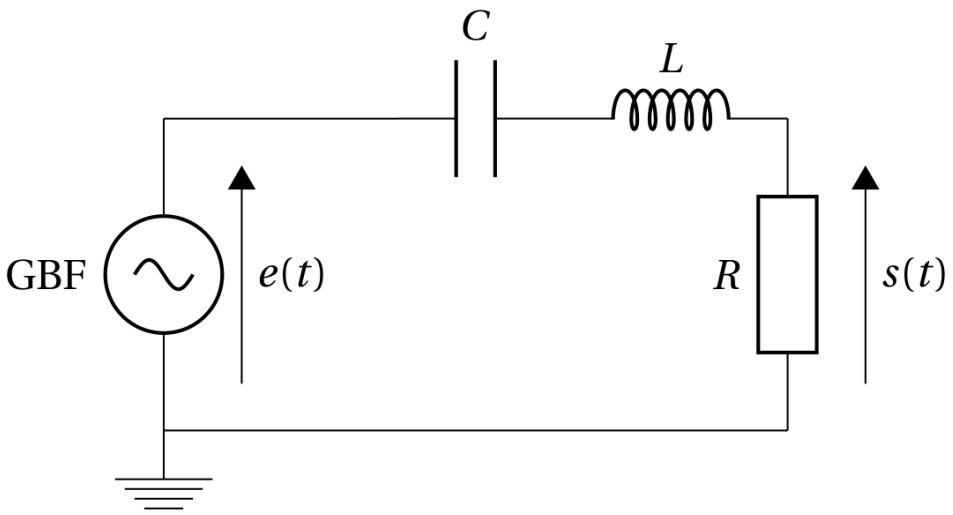


Figure 1: Circuit RLC à réaliser

La fonction de transfert est[2] :

$$H = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jR_{tot}C\omega} = \frac{R}{R_{tot}} \frac{1}{1 - jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{1}$$

Où $R_{tot} = R_L + R_{GBF} + R$. où R_L est la résistance de la bobine à mesurer en courant continu par $U_L = R_L$ et I_L. $R_{GBF} \approx 50\ \Omega$, impédance de sortie du GBF.

La pulsation de résonance est[3] :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2}$$

[1] La page **https : //fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9sonance** est excellent à ce sujet.
[2] Voir démo annexe
[3] Voir démo annexe

On distingue le facteur de qualité[4] :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R_{tot}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\frac{1}{R_{tot}} \tag{3}$$

1.1.2 Experience : Tracé du diagramme de Bode

Expérience :

Réaliser le filtre passe-bande RLC, avec $R = 100\ \Omega$, $C = 100\ nF$ et $L = 0,1\ H$, l'alimenter par un GBF en régime sinusoïdal (tension e).

- Diagrammes de Bode : Afficher la tension d'entrée et celle aux bornes de la résistance sur un oscilloscope. En utilisant les mesures automatiques, nous relevons ces valeurs ainsi que le déphasage entre les 2 signaux que nous rentrons dans Régressi. Nous effectuons ces mesures pour différentes fréquence; ce qui nous permet de tracer les diagrammes de Bode du filtre[a].

- Fréquence de résonance : Mesurer la fréquence de résonance du filtre. Une façon très précise est de mettre $e(t)$ et $s(t)$ en mode XY à l'oscilloscope. On cherche alors à voir une ligne et non plus une ellipse. En effet, à la résonance, on acquiert entre entrée et sortie un déphasage de $\pi/2$ pour un ordre 2. ($f_0 \approx 1,59\ kHz$).

- Facteur de qualité : Il est donné par[b] :

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \tag{4}$$

où f_1 et f_2 correspondent aux limites de la bande passante du filtre $V_s(f_1) = V_s(f_2) = V = \frac{1}{\sqrt{2}}V_s(f_0)$

[a] Voir en annexe pour plus d'explication
[b] Voir démo en annexe

On vient de voir pour un système électrique assez classique un phénomène de résonance.

Les circuits RLC ont été utilisés très largement dans tous les récepteurs de radio et de télévision. Ils étaient utilisés pour filtrer de fréquences et pour générer le signal de l'oscillateur local. Ils apparaissaient aussi, d'une façon un peu plus complexe dans les transformateurs FI (fréquence intermédiaire). Pour ces applications ils ont été largement remplacés par de filtres en céramique, et des boucles à verrouillage de phase.

On les voit aussi, tous les jours dans certains types d'étiquettes et des dispositifs anti-vol dans les magasins.

[4] il peut s'interpréter comme le rapport de l'énergie stockée divisée par l'énergie dissipée par cycle dans l'oscillateur

♪ Transition :
Si nous étudions l'étude libre de la décharge du condensateur dans la résistance et la bobine[a], nous trouvons le résultat suivant: lorsque $Q > 1/2$, nous observons un régime d'oscillations amorties, de pseudo-pulsation :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{R_{tot}}{2L}\right)^2 \tag{5}$$

Pour le diapason, on observe de telles oscillations. Nous allons donc pouvoir traiter ce système par analogie avec le circuit RLC.

[a]Pour voir l'origine des résultats, voir annexe sur l'étude des différents régimes en régime libre.

1.2 Système diapason + boite de résonance

1.2.1 Caractérisation de la décroissance de l'amplitude

Pour un oscillateur pseudo-periodique amorti quelconque, on peut définir la réponse comme :

$$X(t) = cos(2\pi f_0\, t) g(t) \tag{6}$$

où $f(t)$ est une fonction décroissante du temps.
Le décrément logarithmique est défini comme le ln du rapport de deux amplitudes max successives du signal X (séparées par une pseudo-période $T_{\approx}$.

$$D = \ln\left(\frac{g(t)}{g(t+T_{\approx})}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}X + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X + \omega_0^2 X^2 = 0 \tag{8}$$

On propose ($Q > 1/2$) :

$$g(t) = exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \tag{9}$$

Le décrément logarithmique donne alors :

$$D = \ln\left(\frac{exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}{exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}(t+T_{\approx})\right)}\right) = \ln(\exp\left(\frac{\omega_0 T_{\approx}}{2Q}\right)) \tag{10}$$

Nous obtenons alors :

$$D = \frac{\omega_0 T_{\approx}}{2Q} \tag{11}$$

Dans le cas d'un oscillateur du deuxième ordre **où le facteur de qualité est grand** $Q \gg 1$, on suppose que la **pseudo-pulsation des oscillations est égale à la pseudo-pulsation à la résonance**. En effet, nous avons :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{R_{tot}}{2L}\right)^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4\,Q^2}\right) \approx \omega_0^2 \tag{12}$$

D'où :

$$D = \frac{\pi}{Q} \tag{13}$$

Si jamais on fait le décrément logarithmique en laissant passer n pseudo-periodes, on récupère :

$$D = n\,\frac{\pi}{Q} \tag{14}$$

1.2.2 Expérience

Expérience :

Faire sonner un diapason sur sa boite avec le marteau prévu à cet effet.
à l'aide d'un micro, acquérir le signal sonore sur un oscilloscope. Mesurer D_n et ω_0. En déduire Q.

On voit bien que le signal au cours du temps est quasi-sinusoïdal avec une amplitude lentement décroissante.

1.2.3 Réflexions et conséquences

Quand on a parlé de diapason, on a en fait ici étudié **le diapason et sa caisse**[5] La caisse est en fait une cavité résonnante censée n'amplifier que le fondamental du diapason. Comme elle a un plus faible facteur de qualité, c'est d'avantage elle que l'on a étudiée ici que le diapason[6] seul. Cette cavité est de longueur $\lambda/4$ par rapport à la longueur d'onde du diapason pour ne résonner que pour le fondamental de la fréquence du diapason.

Transition :

On a vu que la résonance d'un degré de liberté se manifeste de plusieurs manières :

- un changement de la phase de la fonction de transfert
- un maximum local dans l'amplitude de la fonction de transfert. qui a un comporte-

[5] Son facteur de qualité est tel que :

$$\frac{1}{Q_{ensemble}} = \frac{1}{Q_{boite}} + \frac{1}{Q_{diapason}} + \frac{1}{Q_{couplage}} \tag{15}$$

où $Q_{diapason}$ est celui du diapason (très élevé), Q_{boite}, celui de la cavité résonnante $\lambda/4$, et $Q_{couplage}$ qui quantifie l'efficacité du transfert d'énergie entre les deux. On considère un transfert sans pertes : $Q_{couplage} = +\infty$. Pour remonter à $Q_{diapason}$, il faut faire de même avec le diapason sans la boite. Mais le signal du micro est faible et il faudrait l'amplifier...

[6] Pourquoi fixe-ton le diapason par un pied ? Pourquoi est-il symétrique ?
Un diapason est constitué de deux oscillateurs que sont chacun de ses bras mécaniques. Ces deux oscillateurs sont bien entendu couplés. Le diapason lui-même résonne pour deux fréquences qui correspondent à un mode symétrique et un antisymétrique, légèrement décalés en fréquence l'un de l'autre.
En fixant la position du pieds (poignée) du diapason, on impose un 0 au milieu. On sélectionne alors le mode antisymétrique. On n'a plus qu'une seule fréquence et on peut s'accorder.

ment de passe bande avec un facteur de qualité donné.

- une réponse impulsionnelle à une pulsation proche de la résonance.

Les 2 études réalisés jusqu'ici concernait des système à un degré de liberté. Maintenant, intéressons nous à des systèmes résonnants à plusieurs degrés de liberté : modes propres.

2 Plusieurs degrés de libertés ; modes propres et cavités

(Plan de secours si la cavité Fabry-Perro ne fonctionne pas)

2.1 Corde de Melde :

2.1.1 Description du dispositif

La corde de Melde peut être assimilée à une infinité d'oscillateurs couplés.

Une extrémité de la corde est attachée à un vibreur, et l'autre est reliée à une masselotte par l'intermédiaire d'une poulie. La masselotte M impose une tension $T = Mg$ dans la corde. On note L la longueur et μ la masse linéique de la corde.

En considérant des déformations faibles, et en négligeant l'influence de la pesanteur, on peut montrer que le déplacement vertical y(x, t) de la corde obéit à une équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}y = 0 \quad \text{où :} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{16}$$

On considère les conditions aux limites suivantes :

- en $x = 0$, le vibreur impose un déplacement $y(0, t) = acos(\omega t)$
- en $x = L$, la corde repose sur la poulie d'où $y(L, t) = 0$

En cherchant une solution sous la forme d'une onde stationnaire, on aboutit à une solution du type (voir H-prépa Ondes PC p49 pour les détails) :

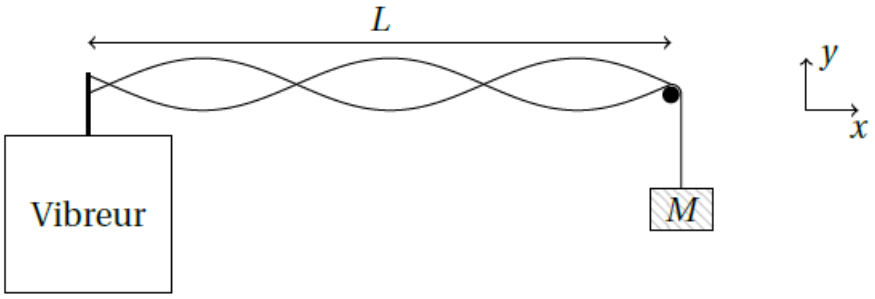
$$y(x,t) = a\frac{\sin\left(\frac{(L-x)\omega}{c}\right)}{\sin\left(\frac{L\omega}{c}\right)}\cos(\omega t) \tag{17}$$

La corde entre en résonance lorsque l'amplitude diverge, c'est-à-dire pour des fréquences :

$$f_n = n\frac{c}{2L} \tag{18}$$

En pratique, l'amplitude ne peut pas diverger à cause de l'élasticité de la corde, qui n'a pas été prise en compte dans ce modèle. Cependant, lorsque le système est excité à l'une de ses pulsations de résonance, l'amplitude du vibreur devient négligeable devant celle des ondes. On peut alors assimiler l'extrémité en $x = 0$ à un n?ud de vibration, et n correspond au nombre de ventre sur la corde.

Remarque : en imposant la condition à la limite $y(0,t) = 0$, on montre que les modes propres du système (en régime libre) ont des pulsations identiques aux pulsations de résonances (en régime forcé).



2.1.2 Détermination de modes propres

Avant de commencer, il faut mesurer la masse linéique de la corde utilisée.

Expérience :
Mesurer la longueur d'une ficelle à l'aide d'un mètre-ruban, ainsi que sa masse à l'aide d'une balance de précision, et en déduire sa masse linéique μ (autour de $1\,\mathrm{g\,m^{-1}}$).

On réalise ensuite l'expérience de Melde présentée en figure 2.1.1.

Expérience :
Relier une extrémité de la corde à un vibreur, en réalisant un n?ud autour d'une vis fixée sur le vibreur. Relier l'autre extrémité de la corde à une masselotte $M = 100\mathrm{g}$, que l'on suspend avec une poulie placée à une distance $L = 1\mathrm{m}$ du vibreur.

Alimenter le vibreur avec la sortie d'un amplificateur, commandé en entrée par un GBF qui fournit une tension sinusoïdale basse fréquence de 1V. Régler l'amplificateur sur un gain de 3 environ, puis appuyer sur le bouton Reset pour générer la tension en sortie (la diode s'éteint).

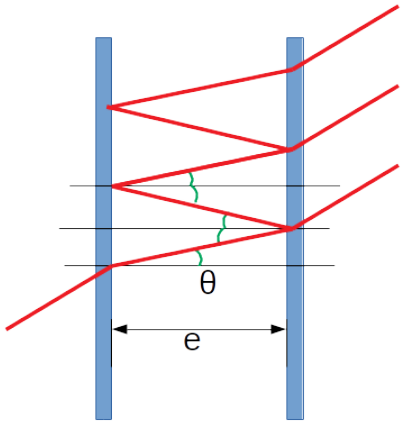
attention: l'amplitude du vibreur ne doit pas être trop importante pour ne pas l'endommager, si le vibreur produit des à coups violents, il faut réduire le gain de l'amplificateur !

Augmenter progressivement la fréquence du GBF pour obtenir les premières fréquences de résonances f_n de la corde. Chaque résonance est caractérisée par n ventres d'amplitudes importantes et n-1 n?uds.

Pour vérifier que les fréquences de résonances correspondent bien à la fréquence imposée par le GBF, on pourra utiliser un stroboscope que l'on relie à un fréquencemètre. On règle alors la fréquence des flashs sur celle des ondes pour la mesurer. Tracer f_n en fonction de n afin de montrer la validité de l'expression 18.

2.2 Cavité Fabry-Perrot

Pour le réglage, voir les annexes.



Pour les notations E_i est l'amplitude incidente.

Il s'agit d'un interféromètre à ondes multiples formé par une cavité à faces parallèles. Pour que les ondes successives qui interfèrent puissent avoir des amplitudes comparables, le facteur de réflexion R sur les faces de l'appareil doit être proche de 1. Ceci permet de n'avoir de la lumière en sortie de l'appareil que dans certaines directions privilégiées, et cela avec une très grande finesse.

On distingue les cavités étalon pour lesquelles la distance e entre les lames est fixe de l'interféromètre de Fabry-Pérot équipé d'un vernier permettant de translater une lame par rapport à l'autre.

2.2.1 Théorie en transmission

déphasage entre deux ondes successives : $\Delta\phi = k\,2ne\,cos\theta$

$$E_{tot} = \sum_{p}^{\infty} E_0 \times Re^{p\Delta\phi} = \frac{1}{1 - Re^{j\Delta\phi}} \tag{19}$$

où $E_0 = (1-R) \times E_i$ où E_i est l'intensité entrante. Donc :

$$I = \mid E_{tot} \mid^2 = \mid E_i \mid^2 \times \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R\cos(\Delta\phi)} \tag{20}$$

donc :

$$I = I_i \times \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\right)} \tag{21}$$

$$I = I_i \times \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4\,R\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \tag{22}$$

Donc, la transmittance :

$$T = \frac{I}{I_i} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \tag{23}$$

Ceci ressemble à :

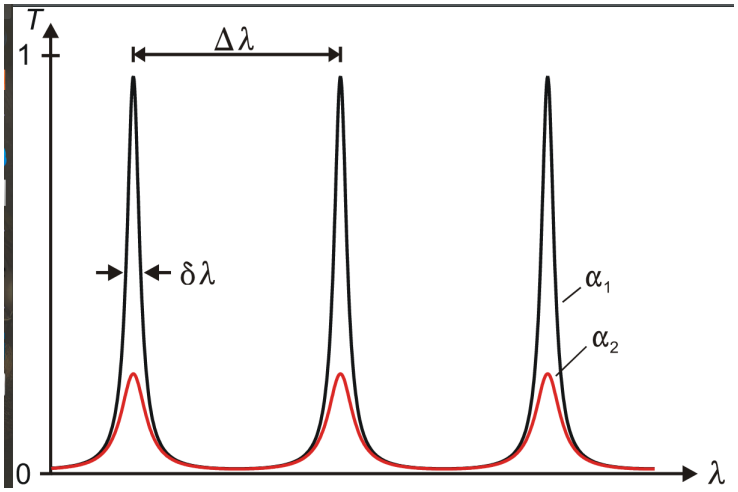


Figure 2: transmittance de la cavité (wikipedia.org, libre de droits)

On pose $\Delta\lambda$ l'intervalle entre deux groupes de pics consécutifs et $\delta\lambda$ la largeur à mi-hauteur d'un pic.
On définit la finesse :

$$F = \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} \tag{24}$$

On comprend alors que l'interféromètre de Fabry Pérot est capable de filtrage spectral assez sélectif. Plus F est grande, plus le filtre sera sélectif.

Exprimons $\delta\lambda$ et $\Delta\lambda$:

- la largeur à mi-hauteur $\delta\lambda$: nous repartons de la formule 23 et regardons quand la transmittance à baissée de moyen. Cela revient, pour le pic centrée sur 0, à :

$$\frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2(x)} = \frac{1}{2} \quad \text{où :} \quad x = \frac{\Delta\phi}{2} \tag{25}$$

  Cette expression peut se simplifier au voisinage des maximas, dans le cas où $R \simeq 1$. Les pics sont fins et nous pouvons donc effectuer un DL du sinus : $\sin^2 x \simeq (x - p\,\pi)^2$ avec $p = 0$ pour le pic que nous avons choisit. D'où :

$$\frac{(1-R)}{\sqrt{R}}\frac{1}{2} \simeq x \tag{26}$$

  Ainsi :

$$\delta x = 2x \simeq \frac{(1-R)}{\sqrt{R}} \tag{27}$$

- la largeur entre 2 pics : nous la déterminons par la différence de 2 annulations successives du sinus, d'où : $\Delta x = \pi$

Nous trouvons donc une finesse donnée par la formule :

$$F = \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)} \tag{28}$$

Si les miroirs ont des réflexivités R_1 et R_2, (en énergie) on a :

$$F = \frac{\pi\,(R_1R_2)^{\frac{1}{4}}}{1-(R_1R_2)^{\frac{1}{2}}} \tag{29}$$

Nous allons pouvoir déterminer un facteur de qualité de la cavité Fabry Perrot pour un mode donné par un pic de fréquence f_0 et de largeur δf de la même manière que pour le circuit RLC :

$$Q = \frac{f_0}{\delta f} \tag{30}$$

Nous avons vu que la finesse était définit par :

$$F \equiv \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\Delta f}{\delta f} \equiv \frac{ISL}{\delta f} = \frac{ISL\,Q}{f_0} \tag{31}$$

Où nous avons introduit l'intervalle spectral libre **ISL**[7].

Finalement, nous voyons que nous pouvons exprimer le temps de relaxation τ pour le RLC en fonction du facteur de qualité à l'aide de l'équation 9 :

$$\tau = \frac{2\,Q}{\omega_0} \tag{32}$$

Nous l'interpréterons ici comme le temps de vie d'un photon dans la cavité. Nous obtenons ainsi :

$$F = \frac{ISL\,\omega_0\,\tau}{2\,f_0} = \pi\,\tau\,ISL \tag{33}$$

2.2.2 Expérience : Finesse et facteur de qualité d'une cavité laser

La radiation émise par un laser $He-Ne$ n'est pas purement monochromatique : elle possède une certaines largeur, fixée par le facteur de qualité de la cavité laser. Afin de caractériser notre laser, nous allons ici déterminer la finesse et le facteur de qualité de ce dernier.

Nous utilisons pour cela, une cavité confocale d'analyse spectrale commerciale dont la taille L peut être modifiée à l'aide d'un élément piezoélectrique. Son alimentation se fait avec un boitier de contrôle dédié, qui génère une rampe de tension contrôlant le dispositif piezo. En sortie de cavité est placé un capteur lumineux qui repérera les pic de luminosité lorsque l'un des modes du laser correspondra à une résonance dans la cavité. Nous le relions à un oscilloscope pour observer ses variations dont le déclanchement s'effectuera en monté.

[7] l'intervalle spectrale libre correspond à l'espacement en fréquence entre les différentes raies. Il s'agit ainsi : $ISL = f_n - f_{n-1}$

En translatant le miroir, nous devrions observer une série de pic correspondant à certains modes du laser. Ce motif va se répéter puisque le premier mode va redevenir résonnant pour une nouvelle valeur de la longueur de la cavité confocale [8]. L'intervalle en fréquence entre groupe de pic est égale à l'intervalle libre de la cavité cofocale $ISL_{cavite} = \frac{c}{2L}$ et est une grandeur intrinsèque à la cavité de mesure. Cette grandeur est donnée par le constructeur[9]. Elle nous permet donc de relier les distances temporelles observées à l'oscilloscope à l'intervalle fréquentiel correspondant.

Expérience :

- Nous souhaitons commencer par trouver la largeur spectrale correspondant au laser ISF_{laser}.

  Nous mesurons à l'oscilloscope le temps Δt_{cavite} correspondant à l'ISL_{cavite} ainsi que le temps Δt_{laser} correspondant à l'ISL_{laser}. Si nous supposant que la déformation de la cavité se fasse à vitesse constante, nous pouvons ISL_{laser} d'un simple produit en croix :

$$ISL_{laser} = ISL_{cavite}\frac{\Delta t_{laser}}{\Delta t_{cavite}} \tag{34}$$

- Nous en déduisons la finesse de la cavité Laser[a] :

$$F = \frac{ISL_{laser}}{\delta f_{laser}} \tag{35}$$

  où δf_{laser} est un largeur d'un mode du laser mesurée à l'oscilloscope (et en appliquant le produit en croix pour repasser en fréquence).

- Finalement, connaissant la longueur d'onde λ_0 du laser à notre disposition, nous déterminons le facteur de qualité[b] donné par :

$$Q = \frac{F\,c}{\lambda_0\,ISL_{laser}} \tag{36}$$

[a] J'avais 34
[b] On s'attend à $10^6 < Q < 10^8$

Conclusion

On a vu que

- la résonance est un phénomène transversal de la physique: elle se trouve dans des systèmes mécaniques, optiques, électriques.... et ce quelque-soit le nombre de degrés de liberté.

[8] On suppose que la cavité d'analyse est parfaite. Elle multiplie le spectre du laser par un peigne de Dirac. Avec un piezo commandé par une rampe, on fait balayer à ce peigne toutes les fréquences ce qui nous donne le spectre du LASER.
[9] j'avais 1.5 GHz en préparation.

- il existe un nombre qui quantifie cette résonance. Le facteur de qualité. il était lié à des propriétés spectrales mais aussi d'amortissement des oscillations.

En vrai, on peut vouloir avoir un grand facteur de qualité pour sélectionner précisément une fréquence comme dans un laser ou dans une horloge (horloge à quartz). N'oublions pas cependant, que les résonances peuvent aussi être dangereuses et on cherchera alors un petit facteur de qualité (construction, amortissement dans les voitures...)

Annexe

Fonction de transfert du RLC

Pour obtenir la fonction de transfert, il suffit d'appliquer la structure d'un pond diviseur de tension :

$$s = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} e \tag{37}$$

D'où :

$$H = \frac{s}{e} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \tag{38}$$

On veut tenir compte des résistances de la bobine et du GBZ qui vienne s'ajouter en série au reste du montage. On obtient alors :

$$H = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jR_{tot}C\omega} \quad \text{avec :} \quad R_{tot} = R + R_L\, R_{GBF} \tag{39}$$

Pulsation propre du RLC

On étudie le circuit RLC soumis à une tension e(t). On s'intéresse à la tension aux bornes du condensateur u_C et à l'intensité i qui parcourt le circuit. La bobine est idéale. On applique la loi des mailles :

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + u_C \tag{40}$$

En utilisant la caractéristique du condensateur :

$$i_C = i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_c \tag{41}$$

Nous obtenons l'équation différentielle :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u_C + RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C + u_C = e(t) \tag{42}$$

La pulsation propre correspond à la pulsation des oscillations en l'absence de frottements (amortissement par effet Joule ici) pour le circuit en régime libre ($e(t) = 0$). Pour une tension de la forme $u_C = Ue^{j\omega t}$, nous obtenons :

$$u_c\left(-LC\omega_0^2 + 1\right) = 0 \tag{43}$$

D'où :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{44}$$

Facteur d'amortissement λ et coefficient d'amortissement α :

- Le facteur d'amortissement : il est relié à la résistance globale du circuit. Plus ce facteur sera grand, plus l'amortissement sera élevé :

$$\lambda = \frac{R_{tot}}{2L} \tag{45}$$

- Le coefficient d'amortissement qui s'exprime :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{R_{tot}}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{46}$$

Étude des différents régimes du RLC en régime libre

Nous nous intéressons au comportement du circuit lorsque le condensateur a été préalablement chargé sous une tension e(t) et se décharge ensuite dans la bobine et la résistance. Nous avons vu que l'équation différentielle régissant un tel système (voir annexe pulsation propre) étaient :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u_C + RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C + u_C = 0 \tag{47}$$

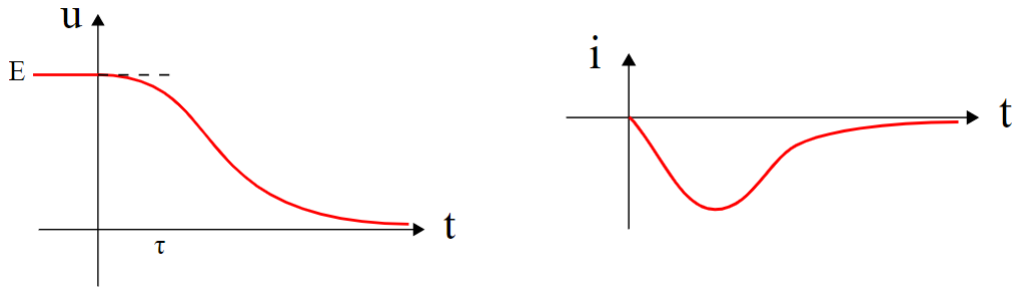
En recherchant des solutions générales de la forme $u = A\,e^{rt}$, nous trouvons :

$$LCr^2u + RCru + u = 0 \tag{48}$$

Nous obtenons alors différents régimes suivant le signe du discriminant :

- un régime apériodique lorsque le déterminant est positif. Cette condition peut se réécrire sous la forme $Q < \frac{1}{2}$.

  Dans ce cas l'évolution de la tension et du courant au cours du temps est de la forme :



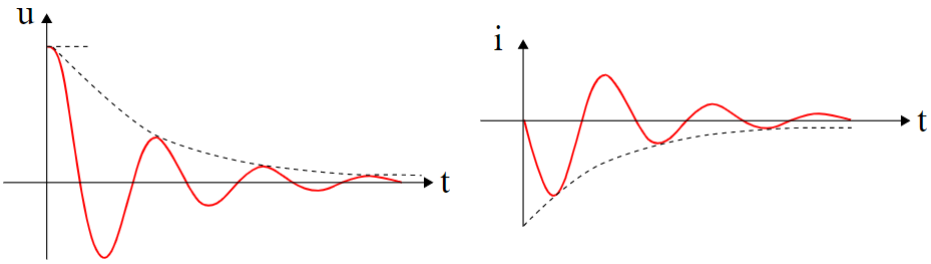
  Dans ce cas de figure, il n'y a pas d'oscillation car l'amortissement est trop fort.

- un régime critique lorsque le déterminant est nul. Cette condition peut se réécrire sous la forme $Q = \frac{1}{2}$.

  Dans ce cas, l'allure des courbes sont identiques à celle du régime précédent; le retour à l'équilibre se fait plus rapidement.

- un régime pseudo-périodique lorsque le déterminant est négatif. Cette condition peut se réécrire sous la forme $Q > \frac{1}{2}$.

  Dans ce cas l'évolution de la tension et du courant au cours du temps est de la forme :



  Dans ce cas, nous observons des oscillation dont l'amplitude décroit exponentiellement. La pseudo période des oscillations est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \tag{49}$$

D'où :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \tag{50}$$

Pour trouver les détails des calcules, nous vous invitons à aller sur :

http://www.physagreg.fr/electrocinetique-3-rlc.php.

Diagramme de Bode

Rappel : les diagrammes de Bode sont constitués de 2 graphiques : le gain (donné en dB) en fonction de la fréquence $G(f)$ et la phase en fonction de la fréquence $\varphi(f)$. Ils sont donnés par les relations :

$$G(f) = 20\log(H(\omega)) \quad \text{et :} \quad \varphi = \arg(H(\omega)) \tag{51}$$

Le premier graphique nous permet de connaitre sur quel gamme notre filtre passe bande est efficace. Le second nous permet de déterminer la résonance. En effet elle peut être repéré par le déphasage de π à cette fréquence caractéristique.

Bande passante et facteur de qualité

La bande passante correspond au domaine de fréquence pour lesquelles :

$$\frac{G^{max}}{\sqrt{2}} =\leq G \leq G^{max} \tag{52}$$

Ce qui revient, en notant que $-20\log(\sqrt{2}) = -3$, à :

$$G(\mathrm{dB}^{\max} - 3\mathrm{dB}) \leq G(\mathrm{dB}) \leq G(\mathrm{dB}^{\max}) \tag{53}$$

Les pulsation de coupures vérifient donc l'équation :

$$\frac{G^{max}}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}} = \frac{G^{max}}{\sqrt{2}} \tag{54}$$

Où nous avons poser le changement de variable $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Nous en déduisons la relation :

$$1 + Q^2\,(x - \frac{1}{x})^2 = 2 \tag{55}$$

$$Q\,(x - \frac{1}{x}) = \pm 1 \tag{56}$$

- Premier cas : $Q\,(x - \frac{1}{x}) = -1$ alors : $x^2 + \frac{1}{Q}\,x - 1 = 0$

  Nous ne gardons que la racine positive : $x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$

- Second cas : $Q\,(x - \frac{1}{x}) = 1$ alors : $x^2 - \frac{1}{Q}\,x - 1 = 0$

  Nous ne gardons que la racine positive : $x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}$

Nous en déduisons la formule reliant l'acart entre les deux fréquences de coupures et le facteur de qualité :

$$\Delta x = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q} \tag{57}$$

Notons que plus le facteur de qualité est élevé, plus la bande passante est étroite.

Réglage du Fabry-Perrot:

Le réglage du Fabry-Pérot consiste à avoir le parallélisme le meilleur possible entre les faces. Pour cela on dispose en général de quatre vis : deux vis de réglage grossier et deux vis de réglage fin.

On commence par régler l'appareil avec un laser. Diriger le faisceau en incidence normale sur le Fabry-Pérot. On voit plusieurs taches brillantes correspondant aux réflexions multiples sur les faces qui pour l'instant présentent un petit angle entre elles.
Agir sur les vis de réglage grossier pour faire se confondre ces images. Il existe également des

images parasites provenant de réflexions sur les faces avant du Fabry-Pérot (ces faces avant sont prismatiques pour diminuer le phénomène).

Placer un écran diffusant devant le faisceau et une lentille de projection derrière le Fabry-Pérot. On doit voir des franges que l'on écarte avec les vis de réglage grossier jusqu'à avoir des anneaux très fins. (Il est possible que ces anneaux soient déjà visibles si le réglage précédent était déjà très bon)

Remplacer le laser par une lampe à vapeur de sodium, en gardant l'écran diffusant, et enlever la lentille de projection dans un premier temps. En regardant à travers le Fabry-Pérot, on voit normalement un sys- tème d'anneaux.
En déplaçant la tête vers l'une des vis de réglage, on voit ce système évoluer, signe que le parallélisme n'est pas satisfaisant (l'épaisseur de la lame d'air n'est pas constante sur tout le champ). , Agir alors sur la vis de réglage fin pour que le système n'évolue plus (il faut en général serrer cette vis si les anneaux sortent).
Répéter l'opération avec la deuxième vis. Comme les deux vis sont à 120° l'une de l'autre, le réglage de l'une influe sur l'autre. 31, Reprendre donc le réglage de la première vis puis de la deuxième jusqu'à ce que le système d'anneaux n'évolue plus quelque soit le sens dans lequel on bouge la tête.
Replacer alors la lentille de projection. On doit voir apparaître un système d'anneaux sur l'écran.

Réponse indicielle :

Réponse indicielle : Lorsque $Q > 1/2$, le régime transitoire provoqué par un échelon de tension est un régime d'oscillations amorties, de pseudo-pulsation :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{R_{tot}}{2L}\right)^2 \tag{58}$$

Alimenter le filtre avec une tension créneau basse fréquence, et mesurer la réponse indicielle du filtre avec la carte d'acquisition. Lisser fortement la courbe, la dériver, puis calculer sa TF en amplitude et en phase (en sélectionnant manuellement une durée d'analyse la plus longue possible). Retrouver les caractéristiques de ce filtre avec son diagramme de Bode.

Lorsque $Q < 1/2$, le régime transitoire provoqué par un échelon de tension est un régime apériodique. Il n'est plus possible de remonter à f_0 par des mesures de pseudo-périodes, mais la réponse indicielle permet toujours de retrouver la fonction de transfert. Cependant, les courbes obtenues dans la pratique sont beaucoup moins exploitables.

Modes propres du câble coaxial :

Prendre une bobine de $L = 100\,m$ de câble coaxial. Lui mettre en entrée au GBF une fonction sinus d'amplitude $1\,V$ modulée en fréquence par un triangle de fréquence $\frac{1}{T_{tr}} 0.1 Hz$. On a :

$$\alpha = \frac{\Delta f}{T_{tr}} = \frac{1\,10^6\,Hz - 1\,Hz}{10\,s} \tag{59}$$

On souhaite obtenir un sinus dont la fréquence variera lentement de $1\,Hz$ à $1\,MHz$. à l'oscilloscope

en bout de câble, on observe sur une fenêtre de $10\,s$.
On voit des pics d'amplitude de la réponse qui sont régulièrement espacées. Mesurer la l'écart de temps Δt entre ces pics.
Comparer à $\alpha \times \Delta t$ à $c'/(2L)$ où $c' \approx 2\,10^8\ m/s$ est la vitesse de l'onde dans le cable (CL :ouvert au deux bouts). α dépend de la façon dont on parcourt les fréquences : pour untriangle modulant qui balaye de $1\,Hz$ à $1\,MHz$ en $10\,s$, on a[10] :

[10]En effet, dans le montage sur le transport de l'information, on a vu que la relation était linéaireentre tension de la rampe et fréquence du signal modulé.