

MP32 – COUPLAGE DES OSCILLATEURS

14 avril 2019

Lagoin Marc & Ramborghi Thomas

Commentaires du jury

- Attention les pendules utilisés dans ce montage ne sont souvent pas des pendules simples.
- les expériences de couplage inductif sont souvent difficiles à exploiter car les candidats ne maîtrise pas la valeur de la constante de couplage.
- il est possible d'utiliser des couplages non-linéaire aux nombreuses applications
- les dispositifs de modélisation doit être compris.

Bibliographie

↩ ,

Expériences

- ☞ Couplage capacitif
- ☞ Pendules pesants couplés par un fil de torsion
- ☞ Chaîne d'oscillateurs couplés par des ressorts
- ☞ Couplage non-linéaire : la synchronisation de métronomes

Table des matières

1 Pendules pesants couplés par un fil de torsion	2
2 Chaîne d'oscillateurs couplés par des ressorts	5
3 Couplage inductif par inductance mutuelle	8

Introduction

Un grand nombre de système physique sont modélisés par des oscillateurs. En effet il s'agit d'un modèle pertinent pour décrire un système qui est perturbé faiblement et évolue faiblement autour de l'équilibre. Nous pouvons citer : la vibration des noyaux d'une molécule diatomique, vibration des noyaux dans un cristal et l'oscillation de torsion d'une molécule d'éthylène. Par ailleurs nous avons vu de nombreux impacts du couplage entre 2 corps tel que l'attraction gravitationnelle, le ferromagnétisme ou l'interaction électrostatique. Tout ces exemples montre que le couplage change la dynamique des corps pris séparément. Nous allons illustrer cette modification à travers 3/4 expériences.

Un système de 2 oscillateurs possèdent une dynamique donnée par un système de la forme :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \omega_1^2 x_1 + f(x_2) \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \omega_2^2 x_2 + f(x_1) \end{cases} \quad (1)$$

Suivant la forme des fonction f et g , nous obtenons différents types de couplages. Si elles sont toute les deux des fonctions affines, nous parlerons de couplage capacitif/élastique. Si elles sont proportionnelles aux dérivées secondes, nous parlerons de couplage inductif/inertiel.

Nous pouvons réécrire le système précédent sous forme matricielle.

- pour un couplage élastique, l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{X} + \overline{\overline{W}} \vec{X} = 0 \quad (2)$$

- pour un couplage par inertie, l'équation prend la forme :

$$\overline{\overline{W}} \frac{d^2}{dt^2} \vec{X} + \vec{X} = 0 \quad (3)$$

Si les deux oscillateurs sont à la même pulsation, le couplage lèvera la dégénérescence entre les deux pulsations.

Nous voyons donc là qu'il existe un grand nombre de couplage possible.

Deux définitions à ne pas confondre :

- résonance : transfert maximal d'énergie entre un excitateur extérieur et le système.
- modes propres : chercher des solutions stationnaires harmoniques à un système d'équation qui ne nécessite pas un apport d'énergie de l'extérieur.

1 Pendules pesants couplés par un fil de torsion

Nous prendrons comme premier exemple d'oscillateur couplés 2 pendules pesant couplés par un fil de torsion. Voici en figure 1 notre système d'étude.

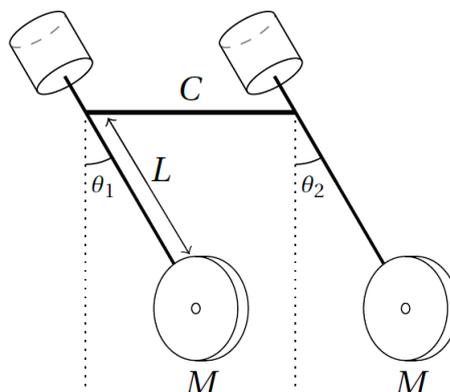


FIGURE 1 – Schéma de notre système de 2 pendules pesants couplés par un fil de torsion. Ce schéma est pris du poly de Jérémy Ferrand.

Nous allons prendre les notations suivantes : soit J_0 leur moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation et C la raideur du fil de torsion. Sur chacun des pendules, il est accroché une masse M à une distance L de l'axe de rotation. On note θ_1 et θ_2 les angles respectifs des tiges avec la verticale.

Rappel : le théorème du moment cinétique est donné par :

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_i \vec{M}_i \quad (4)$$

où \vec{L} est le moment cinétique et \vec{M}_i le moment associé à la force \vec{F}_i .

En appliquant ce théorème au niveau des 2 masses nous obtenons le système général défini précédemment :

$$\begin{cases} (J_0 + ML^2) \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + MgL \sin(\theta_1) = C(\theta_2 - \theta_1) \\ (J_0 + ML^2) \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + MgL \sin(\theta_2) = C(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (5)$$

Nous nous plaçons dans le cas où les oscillations se font à petits angles, ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_0^2 \theta_1 = \frac{C}{(J_0 + ML^2)} (\theta_2 - \theta_1) \\ \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \omega_0^2 \theta_2 = \frac{C}{(J_0 + ML^2)} (\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (6)$$

où nous avons défini par $\omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{J_0 + ML^2}}$ la pulsation propre des pendules indépendants.

Nous pouvons ici exprimer le système sous la forme : $\frac{d^2}{dt^2} \vec{X} + \overline{\overline{W}} \vec{X} = 0$. Il s'agit donc ici d'un couplage élastique.

En posant $\Delta\theta = \theta_1 + \theta_2$, $\delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ et $\omega_a^2 = \frac{MgL + 2C}{J_0 + ML^2}$, nous pouvons réécrire le système sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \Delta\theta = -\omega_s^2 \Delta\theta = -\omega_0^2 \Delta\theta & \text{mode symétrique (par échange } \theta_1 \rightleftharpoons \theta_2) \\ \frac{d^2}{dt^2} \delta\theta = -\omega_a^2 \delta\theta & \text{mode antisymétrique} \end{cases} \quad (7)$$

Nota Bene : il faut pour cela effectuer la somme et la différences des 2 équations.

Nous allons repérer l'angle de chaque pendule à l'aide d'un capteur potentiométrique. Nous obtenons en sortie une tension proportionnelle à l'angle. Comme tout capteur, il nous faut l'étalonner pour connaître sa réponse.

Équilibrage des pendules



⊖ en préparation

- Nous découplons les pendules en dévissant les 2 mandarins qui serrent le fil de torsion. Nous vissons/dévissons les 2 masselotte en haut en manière à placer le centre de gravité de charge pendule sur l'axe de rotation. Lorsque c'est le cas, chaque pendules reste fixe quelque soit l'angle que nous lui imposons.
- Nous pouvons alors relier les pendules au capteur. Nous plaçons le gain au max pour chaque pendule. Nous réglons le zéro à l'aide d'un voltmètre pour qu'il corresponde à des tensions nulles lorsque la position des pendules est verticale.
- Nous relevons la tension U_i pour différents angles θ_i sur Régressi puis nous effectuons une régression linéaire. Nous avons ainsi l'équivalence entre une tension affichée et un angle du pendule.

Nous allons pouvoir à présent étudier les effets du couplage. Nous accrochons pour cela sur chacun des deux pendules une même masse M à une même distance L de l'axe de rotation. Nous donnons un angle faible à l'une des tiges et maintenons l'autre à la verticale. Puis nous lâchons les deux pendules pour les laisser évoluer librement. La superposition des deux modes propres va produire un phénomène de battements.

pulsations propres, moment d'inertie et raideur du fil



⊖ 3 min

- Nous acquérons les signaux des 2 pendules pendant quelques minutes sur Latis-Pro. La réalisation une FFT sur les signaux nous permet de remonter aux deux pulsations propres ω_s et ω_a .

- nous recommençons l'expérience pour différentes valeurs de L (nous n'en ferons qu'une seule devant le jury) ce qui nous permet de tracer $\frac{1}{\omega_a^2 - \omega_s^2}$ en fonction de L^2 . Nous pouvons ainsi, par régression linéaire remonter à J_0 et à C .

$$\frac{1}{\omega_a^2 - \omega_s^2} = \frac{1}{\frac{MgL + 2C}{J_0 + ML^2} - \frac{MgL}{J_0 + ML^2}} = \frac{M}{2C}L^2 + \frac{J_0}{2C} \quad (8)$$

Une propriété intéressante et importante à relever ici est la linéarité des équations pour de faibles angles. Par principes de superposition les 2 modes s'ajoutent et ne s'échange donc pas d'énergie. Nous allons pouvoir montrer qualitativement cette propriété en imposant comme condition initiale l'excitation d'un seul des 2 modes.

Mise en évidence de l'indépendance des modes



⊖ 1 min

Nous donnons le même angle initial à nos 2 pendules et nous regardons les fréquences excitées. Si l'angle choisi est suffisamment petit, nous allons observer uniquement la fréquence du mode symétrique. Nous pouvons également les lâcher à des angles opposés et observer, cette fois-ci, uniquement le mode anti-symétrique.

Nota Bene : Voici le lien vers l'article wikipédia permettant d'en savoir un peu plus sur la fast fourier transform :

https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform

Nous allons maintenant passer à une étude énergétique de notre système. Nous reprenons pour cela le système d'équation 5. Les énergies de chacun des pendules sont données par : $E_{ci} = \frac{1}{2}(J_0 + ML^2)\left(\frac{d\theta_i}{dt}\right)^2$. Pour obtenir les énergies potentielles, nous repartons de la forme :

$$\delta W_i = \vec{P}_i \cdot \vec{v}_i = M g \vec{e}_z \cdot L \frac{d}{dt} \theta_i \vec{e}_{\theta_i} \quad (9)$$

D'où :

$$E_{pi} = \int_0^{\theta_i} \delta W_i = \int_0^{\theta_i} M g \sin(\theta_j) \frac{d}{dt} \theta_j d\theta_j = M g L (1 - \cos(\theta_i)) \quad (10)$$

Nous obtenons finalement le système d'équation :

$$\begin{cases} E_1 &= \frac{1}{2}(J_0 + ML^2)\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + MgL(1 - \cos(\theta_1)) \\ E_2 &= \frac{1}{2}(J_0 + ML^2)\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 + MgL(1 - \cos(\theta_2)) \\ E_c &= \frac{1}{2}C(\omega_1 - \omega_2)^2 \end{cases} \quad (11)$$

et l'équation totale est donnée par : $E_{tot} = E_1 + E_2 + E_c$

Mise en évidence de l'échange d'énergie entre les différents oscillateurs



⊖ 2 min

Nous partons d'une condition initiale quelconque et nous réalisons de nouveau une acquisition sur Latis-Pro. Nous pouvons alors remonter aux énergies E_{tot} , E_1 , E_2 et E_c à l'aide de la feuille de calcul. Il faut ici penser à convertir les tensions obtenus en angles grâce à l'étalonnage précédent. Pour de meilleur résultat, nous pouvons lisser les courbes et soustraire aux angles leurs valeurs moyennes sur l'acquisition. Il ne nous reste enfin plus qu'à tracer l'évolution des énergies au cours du temps.

Nous pouvons voir que, contrairement aux modes propres, les pendules peuvent s'échanger de l'énergie. À partir de la décroissance de l'énergie totale, nous pouvons en déduire le type de frottement prédominant et le facteur de qualité du système. L'amortissement peut être décrit par une exponentielle décroissante. Par conséquent plus la vitesse décroît, plus l'énergie diminue lentement ; ce qui est le signe que les pendules sont donc principalement soumis à des frottements fluides. Le nombre d'oscillation nous permet de remonter au facteur de qualité qui est de l'ordre de 5.

2 Chaîne d'oscillateurs couplés par des ressorts

Nous maintenant passer à une généralisation du cas précédent en étudiant un système de 4 pendules simple de longueur L , de masse M , séparés d'une distance l_0 au niveau de leur point d'accrochage, incliné d'un angle θ_i . Les masses sont reliées par des ressort de raideur k et sont repérés par leur position x_i . Nous retrouvons en figure 2 un schéma du montage.

Nous considérons là encore des petits déplacements ; ce qui nous permet de considérer leurs mouvements horizontaux. Chaque masse est soumise : à son poids $\vec{P} = M g, \vec{e}_z$ à l'action des liaisons pivots $\vec{T} = T \vec{e}_t$ (avec \vec{e}_t le vecteur unitaire dirigé suivant la tige du pendule) et aux forces de rappel des ressorts auxquels elle est attachée proportionnel à l'étirement du ressort par rapport à sa position d'équilibre.

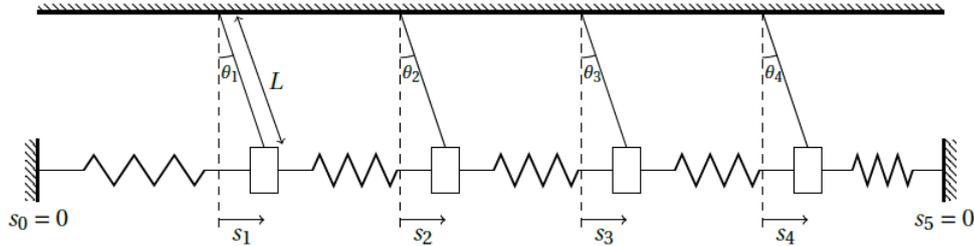


FIGURE 2 – Schéma de notre système de 2 de 4 pendules simple dont les masses aux extrémités sont reliées à leur plus propre voisin par un ressort. Ce schéma est pris du poly de Jérémy Ferrand.

La composante vertical de \vec{T} compense exactement \vec{P} (masse ponctuelle pour le calcul) ; ce qui s'écrit :

$$(\vec{T} + M \vec{g}) \cdot \vec{e}_z = 0 \quad (12)$$

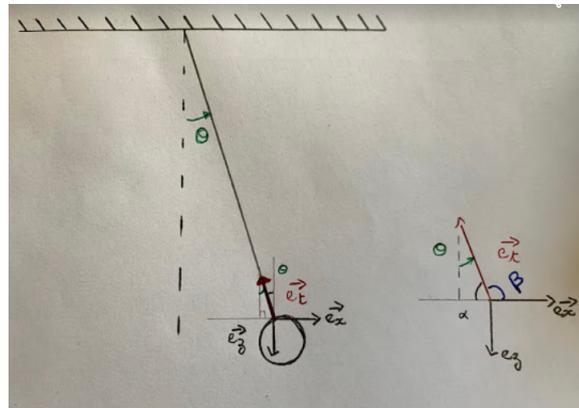


FIGURE 3 – Schéma définissant des angles utiles pour la suite du calcul.

Nous en déduisons que :

$$T \vec{e}_t \cdot \vec{e}_z + M g = 0 \quad (13)$$

$$\vec{e}_t \cdot \vec{e}_z = \sin(\beta) = \sin(\pi - \alpha) = \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = -\cos(\theta) \quad (14)$$

Ainsi, nous remontons à la norme de \vec{T} :

$$T = \frac{M g}{\cos(\theta)} \quad (15)$$

La projection de \vec{T} suivant l'axe Ox donne :

$$\vec{T} \cdot \vec{e}_x = \frac{M g}{\cos(\theta)} \sin(\theta) = M g \tan(\theta) \quad (16)$$

Nous pouvons appliquer le principe fondamentale de la dynamique projeté sur l'axe Ox.

$$M \frac{d^2}{dt^2} x_i = k(x_{i+1} - x_i - l_0) - k(x_i - x_{i-1} - l_0) M g \tan(\theta_i) \tag{17}$$

Nous allons définir une nouvelle variable s_i qui donne l'écart de la position de la masse du pendule i à sa position d'équilibre. Elle est donc reliée à x_i par : $s_i = x_i - i l_0$. En passant à une variable contenant la physique du problème, nous nous attendons à une simplification des équations.

Puisque nous considérons que les oscillations sont suffisamment faible pour considérer le mouvement plan, nous avons : $\tan(\theta_i) \approx \frac{s_i}{L}$.

Nous obtenons alors :

$$\frac{d^2}{dt^2} s_i = \Omega_0^2 s_i + \Omega_1^2 (s_{i+1} + s_{i-1} - 2s_i) \tag{18}$$

où nous avons posé : $\Omega_0^2 = \frac{g}{L}$ et $\Omega_1^2 = \frac{k}{M}$

Nous pouvons réécrire cette expression de manière plus formelle et inclure ainsi de cas d'un système avec un nombre quelconque d'oscillateur :

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{S} = \overline{\overline{W}} \vec{S} \tag{19}$$

Notons au passage qu'il s'agit ici encore de la forme caractéristique d'un couplage élastique.

Les valeurs propres associées à la matrice W nous donnent les pulsations associées aux 4 modes propres du système. Ici nous imposons les conditions aux limites : $s_0 = s_5 = 0$ et nous trouvons (après des calculs hautement non trivial) :

$$\omega_1 = \Omega_0^2 + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\Omega_1^2 \tag{20}$$

$$\omega_2 = \Omega_0^2 + \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})\Omega_1^2 \tag{21}$$

$$\omega_3 = \Omega_0^2 + \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\Omega_1^2 \tag{22}$$

$$\omega_4 = \Omega_0^2 + \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})\Omega_1^2 \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

Il est possible ensuite (toujours avec difficulté) de remonter aux vecteurs propres et ainsi aux modes propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \\ -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Pour les rendre un peu plus visuel, nous pouvons réaliser un schéma comme celui représenté en figure ??.

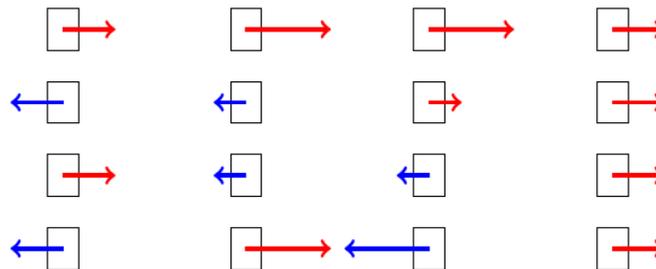


FIGURE 4 – Représentation schématique des modes propres de notre système de 4 pendules couplés. L'image est prise du poly de Jérémy Férrand.

Nous avons maintenant terminé pour la partie théorique et nous allons pouvoir passer à l'étude expérimentale. Pour cela, il nous faut déterminer la valeur de la masse M , de la constante de raideur k ainsi que de la longueur des pendules L .

Calcul des constantes du problème



⊖ En préparation

- Pour déterminer M , nous pesons les différentes masses en bout de pendules à l'aide d'une balance. Nous supposons qu'elles sont toutes identiques et étant égale à la valeur moyenne \overline{M} des différentes mesures. L'incertitude sur la masse sera l'écart type défini par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (M_i - \overline{M})^2} \quad (26)$$

Ce choix sera celui fait également pour k et L

- Pour obtenir k , nous mesurons la longueur du pendule avec et sans la masse au bout. La valeur de l'allongement relatif nous permet alors de remonter à notre constante. En effet un bilan simple de l'équilibrage du poids avec la force de rappel nous donne :

$$k = \frac{Mg}{\Delta L} \quad (27)$$

- Pour obtenir L ... en faite c'est déjà fait juste au dessus!

Nous donnons à titre informatif les valeurs auxquelles nous devons nous attendre : $M \approx 323\text{g}$, $k \approx 115\text{N.m}$ et $L \approx 33\text{cm}$.

Nous allons monter les éléments restant permettant le tracking de nos masses. Nous allons utiliser le dispositif VidéoCom pour suivre le déplacement de chaque masse au cours du temps. Il est constitué de LED qui émettent des flashes lumineux à intervalles réguliers, et d'une barrette CCD qui détecte la position des masses grâce à des bandes réfléchissantes. Visser la caméra du dispositif VidéoCom sur un trépied, puis la placer en face du système de pendules à environ 1 m de celui-ci.

Alimenter la caméra avec son adaptateur 12 V. Alimenter les LED en branchant le petit câble de la caméra sur le port LED sur le coté de celle-ci (les LED s'allument). Allumer un ordinateur puis le relier à la caméra avec le câble USB. Lancer le logiciel VidéoCom Mouvements. Dans le menu Réglage et l'onglet Généralités indiquer le raccordement choisi (USB) dans Raccord Série, puis dans l'onglet Spécifications sélectionner la période d'échantillonnage Δt la plus basse possible. Ajuster la position de la caméra (éloignement, hauteur, orientation) pour détecter les quatre masses, qui doivent apparaître à l'écran. On pourra également jouer sur le zoom et le diaphragme de la caméra, et placer un tissu noir derrière le système pour faciliter la détection.

Mesure des fréquences propres en oscillation libre



⊖ 3 min

Nous mettons les masses en mouvement à partir d'une condition initiale quelconque, par exemple en déplaçant l'une des masses par rapport à sa position d'équilibre. Nous réalisons un enregistrement avec VidéoCom pendant environ 1 min en cliquant sur l'icône Lancer/arrêter la mesure. Si la détection des masses n'a pas posé de problème, nous traçons les FFT des courbes obtenues : avec un clic droit nous sélectionnons Calcul FFT, puis nous surlignons l'enregistrement d'une masse. Enfin, nous mesurons les fréquences propres obtenues.

Nous pouvons comparer les valeurs obtenues à celle théorique avec les valeurs de M , L et k mesurées expérimentalement.

Pour les incertitudes, il est utile de lire le Jolidon p496 et p498. Pour obtenir un ordre de grandeur nous pouvons sommer l'élargissement dû à l'amortissement (elle même dû à la dissipation) ($\Delta\omega_{\text{amortissement}} \simeq \frac{1}{\tau}$ avec τ le temps caractéristique d'amortissement) et l'élargissement dû au fenêtrage ($\Delta\omega_{\text{fenetrage}} \simeq \frac{1}{T_{\text{mesure}}}$ avec T_{mesure} la durée de la mesure). Il s'agit uniquement d'un ordre d'idée ici car les 2 effets se combinent de manière non-triviale.

Nota Bene : Le temps d'acquisition sur lequel est réalisé la FFT doit être judicieusement choisi pour bien mesurer les fréquences propres du système. Il faut trouver un compromis entre un temps suffisamment long pour obtenir une bonne résolution fréquentielle, mais suffisamment faible pour éviter l'amortissement dû aux non-linéarités qui provoque un élargissement des pics.

Nous pouvons montrer (trop compliqué), qu'un système possédant N pendules aura N modes propres dont les fréquences sont données par :

$$\omega_{p,N}^2 = \Omega_0^2 + 4\Omega_1^2 \sin\left(\frac{p\pi}{2(N+1)}\right)^2 \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}^* \quad (28)$$



Relation de dispersion et limite au continu (phonon)



⊖ En préparation

Cette expérience est faite en préparation car les mesures des fréquences sont répétitives dans cette partie.

Fixons la position d'une masse à l'extrémité du système en la maintenant à l'aide d'un statif et d'une pince. Enregistrons ensuite les oscillations libres des masses restantes pour une condition initiale quelconque, puis tracer la FFT des courbes et mesurer les 3 pulsations propres $\omega_{p,N=3}$ du système. Re commençons l'expérience pour 2 (puis 3) masses fixées remontons aux 2 pulsations propres $\omega_{p,N=2}$ (à la pulsation propre $\omega_{p,N=1}$) d'un système de 2 masses (d'une masse).

- Nous superposons sur une même courbes toutes les valeurs $\omega_{p,N}$ en fonction de $\frac{p\pi}{2(N+1)}$ que nous fitons par l'équation $y = A + B \sin\left(\frac{p\pi}{2(N+1)}\right)$ Le fit correspond à la limite continue et représente donc la relation de dispersion des phonons. Ici les conditions aux limites rigides imposent la quantification des modes et le nombre d'oscillateur représente le nombre de degré de liberté donc le nombre d'excitation possible.
- Nous pouvons également ploter les différentes valeurs de $\omega_{p,N}^2$ en fonction de $\sin\left(\frac{p\pi}{2(N+1)}\right)^2$ afin d'obtenir une droite pour une meilleur approche quantitative de la relation mais moins visuelle. Nous pouvons alors remonter aux valeurs de Ω_0 et Ω_1 grâce au coefficient directeur et à l'ordonnée à l'origine.

3 Couplage inductif par inductance mutuelle

Dans cette partie, seul la dernière manip est réellement intéressante. Les autres seront donc faites en préparation et les résultats seront directement présenté au jury.

Nous allons retourner à un couplage de 2 oscillateurs mais qui possède ici une particularité qui mérite notre attention. Il s'agit d'un couplage inductif par inductance mutuelle. Un schéma du système étudié est présenté en figure 5.

Nota Bene : Nous utilisons ici un amplificateur de puissance HSA 4005 (ou 4011) et des rhéostats de 33Ω à l'inducteur et à l'induit afin d'avoir une intensité importante dans le circuit inducteur car le signal à l'induit est faible et peut être ainsi noyer dans le bruit. De plus, pour maximiser le flux, nous présentons les bobines face à face. Nous pouvons utiliser pour cela le dispositif des bobines de Helmholtz. L'avantage de ces dernières est la facilité de les translater l'une par rapport à l'autre sans perdre l'alignement. Par ailleurs il est ici facile de mesure la distance entre les deux.

Nous pouvons commencer par étudier un circuit RLC simple afin de montrer pourquoi nous le considérons ici comme un oscillateur. Un schéma du montage est donné en figure 6.



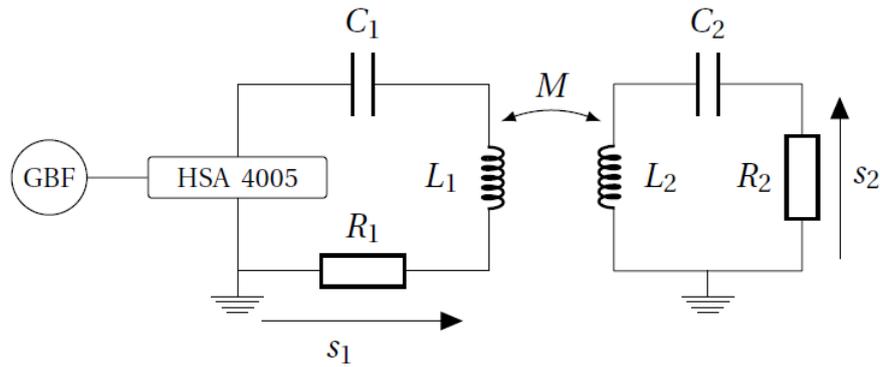


FIGURE 5 – Schéma du système d'oscillateur couplé par induction. Ce dernier a été pris dans le poly de Jérémy Ferrand.

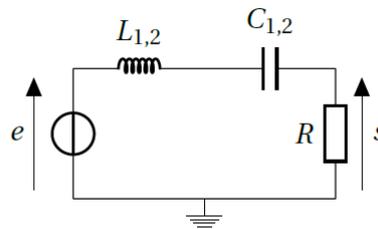


FIGURE 6 – Schéma d'un circuit RLC. Ce dernier a été pris dans le poly de Jérémy Ferrand.

mise en évidence des oscillation d'un circuit RLC simple



⊗ En préparation

Ce montage doit être préparé en préparation car il est inutile de perdre du temps à le monter devant le jury (ne s'agissant pas d'un système d'oscillateurs couplés).

Nous allons prendre l'un des RLC du montage globale pour cette étape. Afin de le considérer comme isolé, nous éloignons au max les 2 bobines. Nous choisissons un rhéostat de 33Ω , un condensateur de 10nF et une des bobines du dispositif de Helmholtz comme bobine

Appliquons au circuit une tension sinusoïdale 1V et 10kHz avec un GBF et observons à l'oscilloscope la tension excitatrice e et la tension aux bornes de la résistance s en mode XY. nous faisons ensuite varier la fréquence de telle sorte à avoir une droite en XY. On est alors à la résonance (puisque la phase de la fonction de transfert est nulle à la résonance).

À montrer au jury lors du passage : pour une tension sinusoïdale en entrée, nous avons un système dont la grandeur physique en sortie oscille. Nous sommes donc bien en présence d'un oscillateur !

Revenons maintenant au fit du sujet et cablons maintenant le montage 5. et mesurons ces caractéristiques :



câblage et mesure des caractéristique du montage



⊗ En préparation

Nous mesurons l'inductance des deux bobines du dispositif de Helmholtz avec le RLC-mètre VoltCraft. Nous réalisons ensuite le circuit induit 2 avec un rhéostat de 33Ω , une boîte de capacités variable et la deuxième bobine du dispositif de Helmholtz.

Avec les valeurs données, la résonance est autour de 40kHz .

Le cas qui nous intéresse ici est le couplage entre 2 oscillateurs identiques. Nous allons donc devoir les accorder.

Accordage des deux RLC



⊖ En préparation

Sans changer la fréquence précédemment utiliser pour le circuit 1, nous alimentons le circuit 2 à la place du circuit 1. Puis, nous faisons varier la capacité pour obtenir à nouveau une droite en XY. Les deux oscillateurs sont accordés et nous avons donc la même fréquence de résonance. Cette dernière est donnée par $\omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ et nous avons alors l'égalité : $L_1C_1 = L_2C_2$.

Il nous reste encore une dernière étape avant de pouvoir étudier les fréquences de résonance : Il s'agit de l'étalonnage nous permettant de relier l'inductance mutuelle à la distance entre les 2 bobines. Rappelons la définition de l'inductance mutuelle :

$$U_2^L = M \frac{d}{dt} i_1 \quad (29)$$

Nous définissons également le coefficient de couplage adimensionné K :

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (30)$$

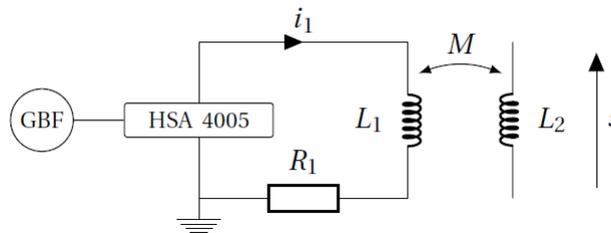


FIGURE 7 – Schéma d'un circuit permettant l'étalonnage de M en fonction de la distance entre les 2 bobines. Ce dernier a été pris dans le poly de Jérémy Ferrand.

Étalonnage de M en fonction de la distance



⊖ En préparation

Nous partons du circuit 7, ce qui revient à enlever le rhéostat et la boîte à capa variable donc montage précédent. Nous ajoutons l'amplificateur de puissance avec gain $\times 10$ (c'est le minimum) en sortie du GBF (sinus $1V_{pp}$, à résonance). Le courant peut devenir important et les rhéostats ne peuvent supporter plus de 3A : nous devons donc le surveiller. Pour cela, nous relevons le courant à l'inducteur i_1 à l'aide d'un ampèremètre Fluke 187 en mode alternatif et la tension aux bornes de la bobine à l'induit u_2^L au voltmètre Fluke 187 en mode alternatif.

Nous observons que la tension à l'induit change lorsque nous déplaçons les bobines. Nous avons $M = \frac{u_2^L}{i_1}$ en régime harmonique d'après l'équation 29. Nous mesurons alors M avec cette formule pour différentes distances d entre les bobines en gardant la même fréquence pour chaque d (de l'ordre de 10kHz, ce qui sera notre fréquence de travail ensuite puisqu'il s'agit de l'ordre de grandeur de la fréquence de résonance). Nous traçons finalement la courbe d'étalonnage. Nous attendons typiquement la dizaine de μH . Il semble d'un ajustement en $M \propto \frac{1}{d^3}$ convienne.

Nota Bene : Notons que l'ajustement précédent provient d'un choix phénoménologique. Le calcul est en effet impossible analytiquement puisque pour déterminer le flux, il faut connaître le champ \vec{B} en tout point et pas seulement sur l'axe.

Nous allons pouvoir enfin, après moult efforts, nous intéresser aux fréquences de résonance de notre système de 2 oscillateurs couplés !

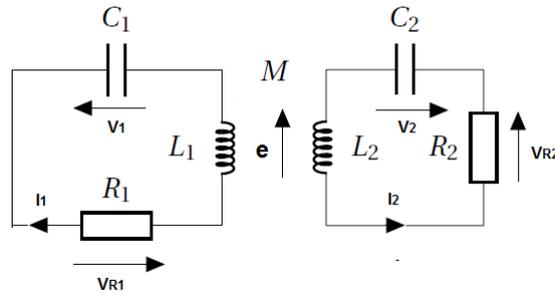


FIGURE 8 – Schéma du montage de couplage inductif introduisant les notations pour la démonstration.

Commençons par les déterminer théoriquement. En figure 8 est récapitulé les conventions qui seront prises par la suite.

Nous commençons par effectuer une loi des mailles (Attention, la force électromotrice est donnée sous la convention récepteur, ce qui induit un signe " – " si nous nous plaçons en convention récepteur) :

$$\begin{aligned} V_1 - e + V_{R1} &= 0 \\ V_2 - e + V_{R2} &= 0 \end{aligned}$$

La force électromotrice est ici donnée par :

$$e_1 = -\frac{d\phi}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad (31)$$

D'où (en supposant les résistances nulles) :

$$\begin{aligned} V_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} &= 0 \\ V_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Puis, en nous servant de la relation $i = C \frac{dV}{dt}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V_1 + L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + M C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} &= 0 \\ V_2 + L_2 C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + M C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} &= 0 \end{aligned}$$

Nous posons maintenant $\omega_1 = \frac{1}{L_1 C_1}$, $\omega_2 = \frac{1}{L_2 C_2}$ et nous cherchons des solutions sous la forme $V(t) = V e^{j\omega t}$; ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \omega_1^2 V_1 - \omega^2 V_1 - M C_2 \omega_1^2 \omega^2 V_2 &= 0 \\ \omega_2^2 V_2 - \omega^2 V_2 - M C_1 \omega_2^2 \omega^2 V_1 &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite réécrire le système obtenu sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & -M C_2 \omega_1^2 \omega^2 \\ -M C_1 \omega_2^2 \omega^2 & \omega_2^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (32)$$

Il existe des solutions non triviales si et seulement si le déterminant est nul. D'où :

$$\begin{aligned}
(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - M^2 C_2 C_1 \omega_1^2 \omega_2^2 \omega^4 &= 0 \\
(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - K^2 \omega^4 &= 0 \\
\omega_1^2 \omega_2^2 - \omega_1^2 \omega^2 - \omega^2 \omega_2^2 + \omega^4 - K^2 \omega^4 &= 0 \\
(1 - K^2)\omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 &= 0
\end{aligned}$$

Nous avons choisit $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$ ce qui nous conduit pour les expressions des fréquences de résonance à :

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}} \quad \text{et} \quad \omega_s = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}} \quad (33)$$

Nous pouvons maintenant passer à la pratique.

Étude des fréquences de résonance



⊖ 3 min

- Nous excitons de manière asymétrique le système couplé (nous appliquons une tension à l'un des circuit seulement). Pour la même série de distances d entre les bobines que précédemment lors de l'étalonnage, nous obtenons, par réponse indicielle avec Latis-Pro, les fréquences de résonance comme les maxima de la tension aux bornes de la résistance à l'induit.
- Nous traçons ces fréquences de résonance ω_s et ω_a en fonction du couplage K (obtenu par la courbe d'étalonnage et la formule 30). Nous observons que les résonances sont d'autant plus séparées que le couplage est fort, donc que les bobines sont rapprochées.
- Pour voir si les résultats colle bien au model, nous pouvons également tracer $\frac{1}{\omega_s}$ (et $\frac{1}{\omega_a}$) en fonction de M qui doit donner une droite pente $-C$ (et C) et d'ordonnée à l'origine LC .

Nota Bene : pour obtenir les fréquences de résonance à partir de la réponse indicielle, nous devons :

- Envoyer un signal créneau basse fréquence à 20Hz d'amplitude 2V.
- Relever la tension aux bornes de la résistance dans le deuxième circuit sous Latis-Pro (10 000 points pendant 20 ms).
- Penser à synchroniser le déclenchement avec le signal du GBF.
- Lisser, dériver, prendre le module de la transformée de Fourier.
- Déterminer les deux fréquences de résonance par les maxima de ce dernier.

Nota Bene : Nous pouvons noter que le coefficient de couplage adimensionné K est toujours inférieur à 1.

Conclusion

Au cours de ce montage, nous avons vu :

- 2 types de couplage (capacitif dans les montage 1 et 2 et inductif dans le montage 3).
- Si les équations sont linéaire, les solutions correspondant à différents modes propres se superposent et il n'y a pas d'énergie entre les modes propres.
- À l'inverse, les oscillateurs peuvent, quant à eux, s'échanger de l'énergie.
- Le couplage de N oscillateurs conduit à N mode propres et le passage au continu nous donne la relation de dispersion des phonons.
- Il existe des systèmes pour lesquels l'élément couplant est extérieur au 2 oscillateurs (inductance mutuelle). Il est alors possible de modifier le couplage et donc les modes propres sans changer les oscillateurs.

Annexes

Détermination du moment d'inertie et de la raideur du fil pour le double pendule

L'étude des oscillations libres des pendules va nous permettre de déterminer le moment d'inertie de la tige. Accrocher un barreau avec une masselotte (500g par exemple) sur la tige d'un pendule, on appelle L la distance à l'axe de rotation (on la mesure à l'aide d'un mètre-ruban) et M la masse du système barreau + masselotte (on la pèse à l'aide d'une balance).

Lancer le pendule avec une amplitude faible (15° max) pour rester dans l'approximation des petits angles, puis mesurer la pulsation ω_0 à l'aide d'un oscilloscope. Recommencer l'expérience pour plusieurs distances L , puis tracer $\frac{MgL}{\omega_0^2}$ en fonction de L , et en déduire l'ordonnée à l'origine J_0 par régression affine. On obtient $J_0 = 0,069\text{kg.m}^{-2}$.

On peut mesurer la raideur du fil de torsion C en couplant les pendules et en maintenant la position du second fixe. Resserrer les mandrins qui serrent le fil de torsion à l'aide de la clé en maintenant les angles des pendules à $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Maintenir bloqué la tige du second pendule sur $\theta_2 = 0$ pendant toute l'expérience, à l'aide de la pièce adaptée. Pour différentes distances L , lancer le premier pendule avec une amplitude faible puis mesurer la pulsation ω_c des oscillations. Tracer $(J_0 + ML^2)\omega_c^2$ en fonction de L , et en déduire l'ordonnée à l'origine $2C$ par régression affine. On obtient $C = 0,34\text{N.m}^{-1}$.