ENS de Lyon — M2 de mathématiques — année 2015–2016
Rapport de stage

Sur les points fixes et périodiques des difféomorphismes hamiltoniens

Benoît Joly
Stage encadré par Marco Mazzucchelli
à l'UMPA, ENS de Lyon, en mai–juillet2016

Résumé

Ce rapport se divise en deux parties relativement distinctes. La première développe la preuve de Théret sur l'existence de points fixes des hamiltoniens des espaces projectifs complexe $\mathbb{CP}^n$ via les fonctions génératrices. La deuxième présente une démonstration de la conjecture de Conley sur l'existence d'une infinité de points périodique des hamiltoniens du tore $\mathbb{T}^{2d}$, toujours à l'aide du point de vue des fonctions génératrices. Grâce à la correpsondance entre les points fixe d'un hamiltonien et des points critiques d'une de ses fonctions génértrice, on se ramène à utiliser la théorie de Morse pour obtenir l'existence de points fixes et périodiques d'un hamiltonien. Dans la deuxième partie, on commence par développer la preuve de Mazzucchelli dans le cas particulier d'un hamiltonien C^1-proche de l'identité puis on termine en démontrant le cas général. Cette généralisation met en relation des idées développées dans la preuve de Ginzburg [4] et la preuve du cas particulier pour obtenir une nouvelle démonstration complète de la conjecture de Conley.

Table des matières

Première partie
Points fixe d'hamiloniens de $\mathbb{CP}^n$.

1 Introduction

1.1 Ennoncé des résultats.

On munit l'espace $\mathbb{C}^n$ de la structure symplectique standard Ω ainsi que sa structure euclidienne standard $\langle .,. \rangle$ telle que $\Omega(z,z') = \langle iz, z' \rangle$. On note $\pi : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ la projection et l'inclusion $i : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$. Alors $\mathbb{CP}^{n-1}$ est munie de la structure symplectique w qui est l'unique structure symplectique vérifiant $i^*\Omega = \pi^* w$.

Considérant un hamiltonien ϕ donné par une fonction hamiltonienne $h = (h_t)_{t\in[0,1]}$ sur $\mathbb{CP}^{n-1}$, et ϕ_h^t l'isotopie hamiltonienne associée à h. On a essayer de caractériser l'existence de points fixe de ϕ_1. On associe à tout point fixe x de ϕ_h^1 une valeur d'action de x, noté $A(x)$, de la manière suivante. On considère le lacet $\gamma : t \to \phi_h^t(x),\ t \in [0,1]$ dans $\mathbb{CP}^{n-1}$, on choisit un 2-disque D tel que $\partial D = \gamma$. Alors l'aire symplectique de D est un nombre réel défini modulo π (car d'apèrs les conventions choisient, l'aire symplectique d'une sphère est égale à π). On note cette aire $a(x)$ et alors l'action de x est définie par

$$A(x) := -\frac{1}{\pi}(a(x) + \int_0^1 h_t(\phi_h^t(x))dt)/ \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

On a démontrer dans cet article le théorème suivant :

Theorème 1.1. *Il existe n valeurs d'action, dites essentielles,* $0 < t_1 \leqslant ... \leqslant t_n \leqslant 1$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Si pour un certain i, $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$, alors ϕ admet un point fixe d'action t_i*
2. *Si pour un certain i, $t_i = t_{i+1}$, alors ϕ a un nombre infini de points fixe d'action t_i*
3. *Si tous les t_i son égaux, alors ϕ est l'identité.*

Remarque 1.1.
1. Ce théorème démontre entre autre la conjecture d'Arnold dans le cas de $\mathbb{CP}^{n-1}$ sous la forme du corollaire.
2. On verra plus tard le lien entre les valeurs d'action essentielles et les valeurs d'action des points fixe de ϕ.

Corollary 1.1. *L'hamiltonien ϕ possède au moins n points fixe.*

1.2 Relever le problème sur $\mathbb{C}^n$.

Les objects que l'on va considérer ont de bonne propriétés suivant les actions des groupes $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{C}*$, ce sont ces propriétés qui insitent à introduire les définitions suivantes.

Définition 1.1. Une application $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ est dite *conique* si elle est $\mathbb{C}^*$-équivariante : $f(\lambda z) = \lambda f(z)\ \forall \lambda \in \mathbb{C}*, \forall z \in \mathbb{C}^n$.

Une fonction $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ est dite *conique* si elle est $\mathbb{S}^1$-invariante et homogène de degré 2.

On remarque que si une fonction conique $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable (sauf peut être à l'origine), sa différentielle est aussi une application conique.

Pour démontrer le théorème 1.1.1, on va considérer un hamiltonien $H_t : \mathbb{C}^n\backslash 0 \to \mathbb{R}$ conique de flot Φ_H^t et tel que la projection de la restriction à $\mathbb{S}^{2n-1}$ correspond à h_t. On peut considérer par exemple la fonction

$$H_t(z) = \pi^* h_t(\frac{z}{|z|})|z|^2.$$

Alors un point fixe x de ϕ_1 va être en corespondance avec une droite complexe critique de points $z \in \mathbb{C}^n$ tels que $\Phi_1(z) = \lambda z$ pour certains λ complexe unitaire. On appelera un tel complexe λ une action essentielle (on verra plus tard la justification de cette appélation). On peut alors utiliser le lien entre les points critiques des fonctions génératrices de symplectomophismes et les points fixe de ces derniers.

2 Fonction génératrice.

2.1 Conventions.

On dit qu'une fonction lisse $S : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{R}$ est une fonction génératrice d'une sous vériété lagrangienne L de $T^*\mathbb{C}^n$ si les deux conditions suivantes sont remplies :

1. Zero est une valeur régulière de l'application $\partial_\xi S : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k \to (\mathbb{C}^k)^*$. Alors l'ensemble $\Sigma_S := (\partial_\xi S)^{-1}(0)$ est une sous variété lisse de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$
2. l'application $i_S : \Sigma_S \to T^*\mathbb{C}^n$ par $i_S(z,\xi) = (z, \partial_z S(z,\xi))$ induit un difféomorphisme de Σ_S sur L.

Remarque 2.1. Avec les notations précédentes, on dira que la variable z est la variable principale et la variable ξ, la variable auxiliaire.

On introduit le symplectomorphisme $\tau : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to T^*(C)^n$, donné par $\tau(z,z') := (\frac{z+z'}{2}, i(z-z'))$

Où $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ est muni de la forme symplectique produit $-\Omega + \Omega$, avec Ω forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Soit un symplectomorphisme ϕ de $\mathbb{C}^n$, on dit que S est une fonction générarice de ϕ si c'est une fonction génératrice de l'image par τ du graphe de ϕ.

2.2 Fonction génératrice d'une composée.

On va donner la formule pour la composée de deux symplectomorphismes tous deux représentés par une fonction génératrice.

Proposition 2.1. Soit ϕ et ψ deux symplectomorphismes de fonction génératrice $R : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{R}$ et $S : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l \to \mathbb{R}$. Alors la fonction $R\#S : \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^l) \to \mathbb{R}$, donné par :

$$R\#S(u,v,w,\xi,\eta) := R(u+w,\xi) + S(v+w,\eta) + \langle u-v, iw\rangle$$

est une fonction génératrice de $\psi \circ \phi$.

Démonstration. La preuve est une vérification élémentaire, on se place sur $\Sigma_{R\#S}$, on inerprète le fait que R et S sont des fonctions génératrice de ϕ et ψ et on combine toutes ces équations. $\square$

On généralise la formule précédente à la composition de $n+1$ fonctions s sur $\mathbb{C}^n$ et sans variables auxiliaires.

Proposition 2.2. Soient $N+1$ symplectomorphismes $\phi_0, ..., \phi_N$ de fonction génératrices $f_0, ..., f_N$ définies sur $\mathbb{C}^n$. Alors on pose la fonction $F : (\mathbb{C}^n)^{2N+1} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(\xi_{2N+1}, \xi_{2N}, ..., \xi_1) := f_0(\sum_{k=1}^{N+1} \xi_{2k-1}) + \sum_{k=1}^{N} f_k(\xi_{2k-1} + \xi_{2k}) - 2\sum_{k=1}^{N} \langle \xi_{2k}, i\xi_{2k-1} \rangle$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{N} \langle \sum_{j>k}^{N+1} \xi_{2j-1}, i\xi_{2k-1} \rangle$$

Et F est une fonction génératrice pour la composée $\phi_N \circ ... \circ \phi_0$, de variable principale ξ_{2N+1}.

Démonstration. La preuve est une récurrence qui fait intervenir un calcul élémentaire. □

2.3 Application au problème initial.

On revient à notre problème initial. Un des intêrets des fonctions génératrices est l'existence d'une correspondance entre les points fixe d'un hamiltonien et le points critiques d'une de ses fonctions génératrice. dans notre cas, pour determiner les points fixes de l'hamiltonien ϕ sur $\mathbb{CP}^{n-1}$, il semble naturel d'étudier les points fixe du relevé Φ sur $\mathbb{C}^n$. Cependant, on montrera qu'il existe une correpsondance entre les points fixes de Φ et les droites critiques de la fonction génératrice de l'hamiltonien $g_t \circ \phi_1$, où $g_t = \mathrm{e}^{-2i\pi t} id_{\mathbb{C}^n}$.

Il faut alors déterminer une fonction génératrice de g_t. Pour cela il suffit de procéder par analyse synthèse et l'on trouve $q_t(z) = -tan(\pi t)|z|^2$. Cependant, cette fonction n'est pas définie sur $[0, 1]$ et la fonction q_t ne peut être une fonction génératrice de g_t sur $[0, 1]$, on va alors découper l'intervalle en 3 et on considère la fonction génératicе $Q_t = q_{\frac{t}{3}} \# q_{\frac{t}{3}} \# q_{\frac{t}{3}}$, qui est bien définie sur $[0, 1]$.

On a alors la formule :

$$Q_t(q, ..., \xi_1) = -\,tan(\frac{\pi t}{3})[|q + \xi_3 + \xi_1|^2 + |\xi_1 + \xi_2|^2 + |\xi_3 + \xi_4|^2] +$$
$$2\langle q + \xi_3 - \xi_2, i\xi_1 \rangle + 2\langle q - \xi_4, i\xi_3 \rangle.$$

En $t = 0$, on obtient la matrice hermitienne suivante dans la base $(q, \xi_4, ..., \xi_1)$ (qui sont des vecteurs de $\mathbb{C}^n$) :

$$H = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & i-\sqrt{3} & 0 & i-\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & -i-\sqrt{3} & 0 & 0 \\ -i-\sqrt{3} & i-\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 0 & i-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -i-\sqrt{3} \\ -i-\sqrt{3} & 0 & -i-\sqrt{3} & i-\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

.

La méthode de Chaperon permet de trouver une fonction génératrice de notre hamiltonien ϕ via une décomposition : $\phi = \phi_k \circ ... \circ \phi_0$ où ϕ_i sont des symplectomorphismes C^1-proches de l'identité. Alors, les hamiltoniens ϕ_j pour j entre 0 et $k-1$ admettent une fonction génératrice. Et on obtient alors via la formule de composition des fonctions génératrices la première partie une fonction génératrice S de ϕ. Et donc la fonction $F_t = S\#Q_t$ est une fontion génératrice du symplectomorphisme $g_t \circ \Phi_H^t$.

Dans notre cadre, $(F_t)_{t\in[0,1]}$ est une famille lisse de fonctions conique sur un espace du type $(\mathbb{C}^n)^l$, telle que 0 est une valeur régulière de la fonction totale $F : [0,1] \times (\mathbb{C}^n)^l \to \mathbb{R}$ et la famille $t \to F_t$ est décroissante. Alors $M := F^{-1}(0)$ est une variété à bord de $[0,1] \times \mathbb{C}^n$. On note $p : M \to [0,1]$ la projection sur la deuxième coordonée.

Lemme 2.1. *Avec les notations précédentes, les valeurs critique de p sont éxactement les valeurs de t pour lesquelles F_t a une ligne critique.*

Démonstration. Par définition de M, on sait que en tout point (t,x) de M, $T_{(t,x)}M = \mathrm{Ker}(dF_{(t,x)})$. De plus, la différentielle de p en (t,x) est la projection de $T_{(t,x)}M$ sur $T_t[0,1]$. D'où p admet un point critique en (t,x) si et seulement si $T_{(t,x)}M = \{0\} \times T_x\mathbb{C}^n$. On écrit alors la différentielle de F en ce point :

$$d_{(t,x)}F(s,v) = \partial_t F_{(t,x)} s + d_x F_t(v)$$

Par définition de $T_{(t,x)}M$ on obtient que (t,x) est un point critique de p si et seulement si $d_x F_t = 0$. Ce qui équivaut encore que F_t admet x comme point critique. De plus vu que F_t est une fonction conique, la droite dirigée par x est une ligne critique. □

Pour étudier les points critique de la fonction p de valeur critique 0, l'idée est d'étudier les changement de topologie des sous niveaux $\{F_t \leqslant 0\}$, pout t variant de 0 à 1. Pour cela on va introduire un invariant topologique.

3 Indice cohomologique

3.1 Définition et premières propriété.

On peut écrire $H^*(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u]/u^n$ avec $u \in H^2(\mathbb{CP}^2, \mathbb{Z})$. On définit un indice cohomologique d'un sous ensemble $A \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{CP}^{n-1}$ par

$$index(A) = 1 + \max\{k \in \mathbb{N} / \ i^*(u^k) \neq 0\}$$

.

On peut alors définir l'indice d'une fonction $f : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{R}$ par $index(f) := index(\{f \leqslant 0\})$. L'avantage de cette définition par rapport à la cup longueur est que cet indice est croissant dans le sens où si $A \subset B$ alors $index(A) \leqslant index(B)$.

Le premier calcul intéressant d'*index* est celui d'une forme quadratique conique.

Proposition 3.1. Soit $\tilde{Q} : \mathbb{CP}^{n-1} \to \mathbb{R}$ forme quadratique induite par une forme quadratique conique $Q : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ (c'est à dire $\mathbb{S}^1$-invariant et homogène de degré 2) alors

$$index(\tilde{Q}) = \frac{1}{2}(ind(Q) + dim\mathrm{Ker}(Q)).$$

où $ind(Q)$ est l'indice de Q en tant que forme quadratique.

Démonstration. L'idée est de rétracter $\{Q \leqslant 0\} \cap \mathbb{S}^{2n-1}$ sur $\mathbb{S}^{ind(Q)+dim\mathrm{Ker}(Q)-1}$ par une homotopie $h_t : [0,1] \times \{Q \leqslant 0\} \cap \mathbb{S}^{2n+1}\mathbb{C}^n$ qui est $\mathbb{S}^1$-invariant. On obtient alors un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\{Q \leqslant 0\} \cap \mathbb{S}^{2n+1} \arrow[r, "\cong", "h_t"'] & \mathbb{S}^{ind(Q)+dim\mathrm{Ker}(Q)-1} \arrow[d] \\
\{\tilde{Q} \leqslant 0\} \arrow[r, "\cong", "\tilde{h}_t"'] & \mathbb{CP}^{\frac{ind(Q)+dim\mathrm{Ker}(Q)}{2}-1}
\end{tikzcd}$$

Pour cela on se rémène à la forme quadratique $Q(z^-, z^+, z^0) = \frac{1}{2}(|z^+|^2 - |z^-|^2)$. et on pose la fonction

$$h_t(z^-, z^+, z^0) = (\sqrt{1 + (1-(1-t)^2\frac{|z^+|^2}{|z^-|^2}}z^-, (1-t)z^+, z^0).$$

Cette foncion est bien définie car si $z^- = 0$ alors $z^+ = 0$ aussi. On vérifie que h_t est bien $\mathbb{S}^1$-invariante et l'image de h_1 est $\mathbb{S}^{ind(Q)+dim\mathrm{Ker}(Q)-1}$.

Ainsi on en déduit $index(\tilde{Q}) = \frac{ind(Q)+dim\mathrm{Ker}(Q)}{2}$. □

On utilisera également une autre propriété importante de l'*index* :

Proposition 3.2. Soit F une fonction conique sur $\mathbb{C}^n$ et ϕ un difféomorphisme conique sur $\mathbb{C}^n$ alors $index(F \circ \phi) = index(F)$.

On reprend le cadre de la section précédente, on a une fonction famille de fonction $F_t : \mathbb{C}^n(\backslash\{0\})$ décroissante en t, admettant 0 comme valeur régulière, et $p : F^{-1}(0) \to [0,1]$. Alors on a la propriété suivante.

Proposition 3.3. Autour d'une valeur régulière t de p, l'application $t \to index(F_t)$ est constante.

Démonstration. En faite, on va montrer que sur une un intervalle $[t_0, t_1]$ ne contenant pas de valeur critique de p alors l'application indice est constante.

Sans perte de généralité on peut supposer que $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. On va alors prouver en premier que $p^{-1}(0)$ est isotope à $p^{-1}(1)$. Au vu des hypothèses, on a que $|\nabla p| > 0$ sur M. On considère l'isotopie ϕ_s sur M engendré par $\frac{\nabla p}{|\nabla p|^2}$. Alors on a que ϕ_s envoie en temps 1 $p^{-1}(0)$ sur $p^{-1}(1)$. En effet, pour tout point $(0, x)$ de $p^{-1}(0)$ on a

$$\begin{aligned} p(\phi_s(0,x)) &= p(0,x) + \int_0^s \frac{\partial}{\partial_u}(p(\phi_u(0,x)))du \\ &= \int_0^s \frac{|\nabla p|^2}{|\nabla p|^2}(\phi_u(0,x))du \\ &= s. \end{aligned}$$

Ainsi $\phi_s(0, x)$ appartient à $p^{-1}(s)$. On vérifie bien que ψ_1 engendré par $-\frac{\nabla p}{|\nabla p|^2}$ est l'inverse de ϕ_1. Et on a le résultat.

On va généraliser la méthode précédente, on garde les hypothèses que p n'a pas de valeur critique sur $[0, 1]$. On note $\tilde{M} = F^{-1}(] - \infty, 0])$ et $\tilde{p} : \tilde{M} \to [0, 1]$ la projection sur la première coordonée. Le problème est que on n'a pas d'information sur $|\nabla \tilde{p}|$. Cependant, on remarque que $\tilde{p}|_{\partial \tilde{M}} = \tilde{p}|_M = p$.

On a de plus l'hypothèse $t \to F_t$ est décroissante d'où, pour tout $t' > t$ on a :

$$(1)\ \{F_t \leqslant 0\} \subset \{F_{t'} \leqslant 0\}.$$

De plus, dans notre cadre de travail, $F : [0, 1] \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ est induite par une fonction $\tilde{F} : [0, 1] \times \mathbb{CP}^{n-1}$. Ainsi, par compacité de $\mathbb{CP}^{n-1}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que tout $t \in [-\epsilon, 0]$ soit une valeur régulière de F. Soit encore que $|\nabla \tilde{p}| > 0$ sur $F^{-1}([-\epsilon, 0])$. On utilise alors une fonction bump $\xi : \tilde{M} \to \mathbb{R}$ égale à 1 sur la différence symétrique de $\tilde{p}^{-1}(0)$ et $\tilde{p}^{-1}(1)$ et nulle sur le complémentaire de $F^{-1}([-\epsilon, 0])$.

Soit ϕ_s l'isotopie engendré par $-\xi \frac{\nabla \tilde{p}}{|\nabla \tilde{p}|^2}$. Alors ϕ_1 est envoie $\tilde{p}^{-1}(1)$ sur $\tilde{p}^{-1}(0)$.

Ainsi par définition de l'indice, on a bien que $t \to index(F_t)$ est constante sur $[0, 1]$. □

Remarque 3.1. De plus, par (1) de la démonstration précédente on a que la fonction indice de F_t, $index : [0, 1] \to index(F_t)$, est une fonction croissante de t. Ainsi, si l'index en 0 diffère de l'index en 1, cette fonction va faire des "sauts" en des valeurs particulières $t_1, ..., t_i$ qui correspondent à l'existence de certains points fixes. On va commencer par caractériser les points fixes suivant la valeur du saut de discontiuité de la fonction *index*. Puis on va compter le nombre de ces valeurs dans le cas particulier d'une fonction génératrice du symplectomorphisme $g_t \circ \Phi$ de $\mathbb{C}^n$ où $g_t = \mathrm{e}^{-2i\pi t} id_{\mathbb{C}^n}$ et Φ le difféomorphisme hamiltonien de $\mathbb{C}^n$.

3.2 Points critiques de p.

On a vu précédement que autour d'une valeur régulière de p, la fonction index est constante. On s'intéresse maintenant à une valeur critique t_0 isolée (en effet, sinon il existe une infinité de points fixe pour le symplectomorphisme Φ) et $\epsilon > 0$ tel que $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ admet seulement t_0 comme valeur critique de p.

On a besoin du petit résultat suivant :

Lemme 3.1. *Soit F une fonction conique de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}$, alors si F admet un point critique z_0, $F(z_0) = 0$.*

Démonstration. Soit $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ une fonction conique, on dérive en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'égalité $F(\lambda z) = \lambda^2 F(z)$. On obtient

$$dF(z)[\lambda z] = 2\lambda F(z).$$

Or pour un point critique z_0, $dF(z_0) = 0$, d'où $F(z_0) = 0$. $\square$

Corollary 3.1. *Soit une fonction $F : \mathbb{CP}^{n-1} \to \mathbb{R}$ qui est induit d'une fonction définie sur la sphère unité de $\mathbb{C}^n$, alors la seule valeur critique possible de F est* 0.

On considère maintenant une famille de fonctions $F_t : \mathbb{CP}^{n-1} \to \mathbb{R}$, qui vérifie la condition de Palais-Smale et les même hypothèses que dans les sections précédentes et on a le résultat suivant :

Proposition 3.4. Soit $\mathcal{U}$ un voisinage assez petit d'un point de $\mathrm{Crit}(F) \cap F_{t_0}^{-1}(0)$ dans $\mathbb{CP}^n$. Alors $H^{2d}(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \neq 0$ où $d = index(F_{t_0+\epsilon}) - index(F_{t_0-\epsilon})$

Démonstration. Pour simplifier la lecture, on pose $i^+ := index(F_{t_0+\epsilon})$ et $i^- = index(F_{t_0-\epsilon})$.

Par définition de l'$index$, comme $t \to index(F_t)$ est croissant (évident par inclusion), on a que $u^{i^+-1} = u^d \cup u^{i^--1}$ où $d = i^+ - i^-$. Or on a dejà que $u^{i^+-1} \neq 0$ et $u^{i^--1} \neq 0$ dans $H^*(\{F_{t_0} \leqslant 0\}, \mathbb{C})$.

D'où par L.S, on sait que $c_1 := c(F_{t_0}, u^{i^+-1})$ et $c_2 := c(F_{t_0}, u^{i^--1})$ sont des valeurs critiques de F_{t_0}. Or par le lemme précédent, on a que $c_1 = c_2 = 0$.

Ainsi, par le théorème de Ljusternik-Schnirelmn, que l'on peut trouver par exemple dans [2],on a $u^d \neq 0$ dans $H^{2d}(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ et donc $H^d(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \neq 0$). $\square$

Remarque 3.2. Ainsi, si la fonction $index(F_t)$ admet une valeur critique t_0 telle que $index(F_{t_0}^+) - index(F_{t_0}^-) \geqslant 2$, alors ϕ admet une infinité de points fixes de valeurs d'action essentielle t_0.

4 Borne inférieur du nombre de points fixe d'un hamiltonien de $\mathbb{CP}^{n-1}$

On a vu que grâce l'indice à cohomologique *index*, on peut repérer l'existence de points fixe. On cherche maintenant à montrer qu'il existe une borne inférieur à ce nombre. On sait en effet que $t \to index(F_t)$ est une fonction croissante, et l'on cherche maintenant à calculer $index(F_1) - index(F_0)$ pour obtenir cette borne inférieur.

Pour procéder à ce calcul, la formule donnée en section 1 de la composée $S\#Q_t$ est difficile à manipuler, on va donc procéder par un autre moyen.

4.1 Autre formule pour la fonction génératrice d'une composée.

On considère deux symplectomorphismes ϕ_1 et ϕ_2 de $\mathbb{C}^n$, soient $F_1 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ et $F_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l \to \mathbb{R}$ des fonctions génératrices de ϕ_1 et ϕ_2. Dans cette partie on va décrire un type de fonction dont les points critiques sont en correspondance avec les points fixes d'une composée de symplectomorphismes, on verra ensuite comment le calcul de l'indice *index* est plus simple dans ce cas là.

Proposition 4.1. En gardant les notations précédentes, on définit $G : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^l \to \mathbb{R}$ par $G(q, \xi, \eta) = F_1(q, \xi) + F_2(q, \eta)$. Alors on a la correspondance :

$$\mathrm{Crit}(G) \leftrightarrow \mathrm{Fix}(\phi_1 \circ \phi_2) \leftrightarrow \mathrm{Fix}(\phi_2 \circ \phi_1).$$

Démonstration. Soit (q, ξ, η) un point critique de G, alors $dG(q, \xi, \eta) = 0$ donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_q F_1(q, \xi) &= -\partial_q F_2(q, \eta) \\ \partial_\xi F_1(q, \xi) &= 0 \\ \partial_\eta F_2(q, \eta) &= 0 \end{aligned}$$

D'où, $(q, \xi, \eta) \in \Sigma_{F_1}$ et comme F_1 est une fonction génératrice de ϕ_1, alors il existe un unique élément $z_1 \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\begin{aligned} q &= \tfrac{z_1 + \phi_1(z_1)}{2} \\ dF_1(q, \xi) &= i(z_1 - \phi_1(z_1)). \end{aligned}$$

Il en est de même pour F_2 et il existe un unique élément $z_2 \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\begin{aligned} q &= \tfrac{z_2 + \phi_2(z_2)}{2} \\ dF_1(q, \eta) &= i(z_2 - \phi_1(z_2)). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) & z_1 - \phi_1(z_1) = -(z_2 - \phi_1(z_2)) \\ (2) & \quad z_1 + \phi_1(z_1) = z_2 + \phi_2(z_2) \end{array}$$

Et donc (1) + (2) donne $z_1 = \phi_2(z_2)$ et (2) − (1) donne $z_2 = \phi_1(z_1)$. Et donc $\phi_1 \circ \phi_2(z_2) = z_2$. D'où le résultat.

□

4.2 Un calcul d'index interessant.

Soit $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ une fonction conique et $Q : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Le calcul de l'indice de la somme directe de F et de Q est explicite.

Proposition 4.2. Soit $G : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ définie par $G(x, y) = F(x) + Q(y)$. Alors *$index(G) = index(F) + index(Q)$.*

Démonstration. Si la forme quadratique est définie positive, le résultat est immédiat, on se ramène donc à démontrer le cas où la forme quadratique Q est définie négative. Soit Q une forme quadratique définie négative telle que $G(x, y) = F(x) - |y|^2$.

Soit ϕ_t^y le flot associé au champ de vecteurs $X_t^y = -|y|^2 \frac{\nabla F}{|\nabla F|^2}$.

Alors pour tout $(x, y) \in \{G \leqslant 0\}$ on a :

$$\begin{aligned} F(\phi_t^y(x)) &= F(x) + \int_0^t dF(\phi_u^y(x))du \\ &= F(x) - |y|^2 \int_0^t \frac{|\nabla F|^2}{|\nabla F|^2}(\phi_u^y)du \\ &= F(x) - t|y|^2. \end{aligned}$$

D'où $F(\phi_1^y(x)) \leqslant 0$. Donc on considère le difféomorphisme de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ définie par $\psi(x, y) = (\phi_1^y(x), y)$ Et on a que $\psi(\{G \leqslant 0\}) \cong \{F \leqslant 0\} \times \mathbb{C}^m$. En effet, on vérifie que l'on a $\psi_t : \{G \leqslant 0\} \to \{G \leqslant 0\}$

$$\begin{aligned} G \circ \psi_t(x, y) &= G(x, y) + \int_0^t dG(\psi_u(x, y)du \\ &= G(x, y) + \int_0^t dF(\phi_u^y(x))du + \int_0^t \langle -2y, y\rangle \\ &= G(x, y) - 3t|y|^2 \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

De plus, pour tout complexe non nul λ, $\phi_t^{\lambda y}(\lambda x)$ est généré par le champ de vecteur $X_t = -\lambda|y|^2 \frac{\nabla F}{|\nabla F|^2}$, car comme F est conique, alors ∇F l'est aussi. Ainsi, on en déduit que ψ est un difféomorphisme conique et on a que $index(G) = index(F) + m = index(F) + index(Q)$.

Attention, ∇F est non nul dès que F ne prend pas la valeur 0. et donc en réalité, ψ est définie sur $\{G \leqslant 0\} \backslash \{F \leqslant 0\}$. et il est égale à l'identité sur $\{F \leqslant 0\}$. $\square$

4.3 Calcul de la différence d'indice.

Grâce aux deux sections précédentes, au lieu de s'intéresser à $F \# Q_t$ la fonction génératrice de $g_t \circ \phi$, on sait que les points fixes sont en correspondances avec les points critique de $G : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{R}$ définie par $G(q, \xi, \eta) = F(q, \eta) + Q_t(q, \xi)$. Par les sections précédentes, pour pouvoir utiliser le lemme précédent sur le calcul d'indice il suffit de composer G avec un difféomorphisme conique de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^k$ qui préserve les fibres et tel que $G \circ \phi$ soit de la forme de la proposition 6.1.

On note $Q_1(q, \xi) = \langle H_1(q, \xi), (q, \xi) \rangle$, on a par le calul le noyau de H_1 engendré par $v = (1, 1, \frac{i\sqrt{3}-3}{4}, \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}i}{2})$ (et on remarque, toujours par le calcul que v engendre aussi Σ_{Q_1}), on pose alors β, la troncature de v défini par

$$\beta = (1, \frac{i\sqrt{3}-3}{4}, \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}i}{2})$$

et soit $\phi_1 : (q, \xi) \to (q, \xi + q\beta)$ alors on a :

$$Q_1 \circ \phi_1(q, \xi) = Q_1(qv + (0, \xi)) = Q_1((0, \xi)).$$

De plus, ϕ_1 est bien conique. On pose $\tilde{Q}_1(\xi) = Q_1((0, \xi))$. Et $\tilde{Q}_1$ est représenté par la matrice la tronquature de la matrice H (on enlève la première linge et la première colonne).

On pose le difféomorphisme $\phi_0(q, \xi) = (q, \xi_4 - q, \xi_3, \xi_2 - q, \xi)$ qui est bien conique, et on a $Q_0 \circ \phi_0(q, \xi) = \tilde{Q}_0(\xi)$.

On peut alors calculer facilement les indices de $\tilde{Q}_0$ et $\tilde{Q}_1$. en effet ces derniers sont représentés par les matrices Q_0 et Q_1 suivante exprimées dans la base $(q, \xi_4, ..., \xi_1)$:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & i & 0 \end{pmatrix}, \; index(Q_0) = 2n$$

et

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -i-\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i-\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 0 & i-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & -i-\sqrt{3} \\ 0 & -i-\sqrt{3} & i-\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \; index(Q_1) = 3n$$

Proposition 4.3. Soit F une fonction génératrice de ϕ, on note $G(q,\xi,\eta) = F(q,\xi) + Q_t(q,\xi)$. Alors

$$index(G_1) - index(G_0) = n$$

Démonstration. On note les difféomorphismes $\psi_1(q,\xi,\eta) = (\phi_1(q,\xi),\eta)$ et $\psi_0(q,\xi,\eta) = (\phi_0(q,\xi),\eta)$ on a alors :

$$\begin{aligned} index(G_1) - index(G_0) &= index(G_1 \circ \psi_1) - index(G_0 \circ \psi_0) \\ &= index(F(q,\eta) + \tilde{Q}_1(\xi)) - index(F(q,\eta) + \tilde{Q}_0(\xi)) \\ &= index(F(q,\eta)) + index(\tilde{Q}_1(\xi)) - (index(F(q,\eta)) + index(\tilde{Q}_0(\xi))) \\ &= index(\tilde{Q}_1(\xi)) - index(\tilde{Q}_0(\xi)) \\ &= n \end{aligned}$$

□

Ainsi, de cette propriété, on a l'existence des valeurs d'action essentielles qui caractérisent les points fixes de Φ. De plus, suivant les valeurs de ces nombres de rotations, on a des informations sur le nombre de point fixe. On remarque qu'on obtient une borne inférieur de ce nombre de point fixe des hamiltoniens de $\mathbb{CP}^{n-1}$ égale à n.

Et donc, on a démontrer l'existence des n valeurs d'action essentielles $t_1, ..., t_n$ du théorème 1.1. De plus, la remarque 3.2 démontre le point 2) du théorème. Le point 1) est vérifié par la correspondance entre les points fixe de ϕ et les droites critique de la fonction G_t. Il ne reste plus qu'à démontrer le troisième point.

Proposition 4.4. Si toutes les valeurs d'action sont égale alors ϕ est l'identité.

Démonstration. On note t cette unique valeur d'action, et alors $index(t^+) = index(t^-) + n$. Par correspondance on a

$$index(\mathrm{Fix}(\phi_1)) \geqslant index(\mathrm{Fix}(g_t \circ \Phi_1)) = index(G_1) \geqslant n$$

Ainsi $index(\mathrm{Fix}(\phi_1)) = n$ et $\mathrm{Fix}(\phi_1) = \mathbb{CP}^{n-1}$. □

On peut aussi démontrer que l'image de ses valeurs d'action essentielles dans $\mathbb{S}^1$ ne dépendent que de l'isotopie hamiltonienne initiale.

5 Action et points périodiques.

On va s'intéresser maintenant au lien entre valeur d'action essentielle d'un point fixe x de ϕ_1 et sa valeur d'action $A(x)$.

Proposition 5.1. Soit x un point fixe de ϕ_1 dans $\mathbb{CP}^{n-1}$, et soit $z \in \mathbb{S}^{2n-1}$ au dessus de x avec pour valeur d'action essentielle τ (c'est à dire $\mathrm{e}^{-2i\pi\tau}\Phi_1(z) = z$), alors on a

$$A(x) = \tau \bmod(\pi).$$

Démonstration. Soit le point fixe x de ϕ et soit $z \in \mathbb{S}^{2n-1}$ au dessus de x associé a la valeur d'acion essentielle τ, on a donc $\mathrm{e}^{-2i\pi\tau}\Phi_1(z) = z$. On considère γ la composition du chemin : $\gamma' : t \to \Phi_t(z)$ et d'un chemin reliant $\Phi_1(z)$ à z dans la fibre de Hopf associée à x (par exemple $t \to \mathrm{e}^{2i\pi t}z, t \in [\tau, 0]$). On obtient alors un relevement du lacet $\beta : t \to \phi_t(x)$, on note D' l'image de D dans $\mathbb{CP}^n$.

On choisit un disque D dont le bord correspond à ce chemin γ. On choisit aussi la primitive α de la forme symplectique standard Ω de $\mathbb{C}^n$ telle que $\alpha(z)\delta z = \frac{1}{2}\Omega(z, \delta z)$. Alors l'intégrale sur D de Ω est égale à l'intégrale sur γ de α. On a alors

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 \alpha(\Phi_t(z)).\frac{d}{dt}\Phi_t(z)dt + \int_\tau^0 \alpha(\mathrm{e}^{2i\pi t}z).\frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{2i\pi t}z)dt.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \alpha(\Phi_t(z)).\frac{d}{dt}\Phi_t(z)dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Omega(\Phi_t(z), X_t(\Phi_t(z))dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 -dH_t(\phi_t(z)).\Phi_t(z)dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 2H_t(\Phi_t(z))dt \text{ car H est 2 homogène} \\
&= -\int_0^1 H_t(\Phi_t(z))dt \\
&= -\int_0^1 h_t(\phi_t(z))dt
\end{aligned}$$

Et la deuxième intégrale donne :

$$\begin{aligned}
\int_\tau^0 \alpha(\mathrm{e}^{2i\pi t}z).\frac{d}{dt}(\mathrm{e}^{2i\pi t}z)dt &= -\frac{1}{2}\int_0^\tau 2\pi\Omega(z, iz)dt \\
&= -\pi\tau \text{ car} |z| = 1.
\end{aligned}$$

On rassemble les deux résultats et on obtient :

$$\begin{aligned}
-\pi A(\beta) &= \int_{D'} w + \int_0^1 h_t(\phi_t(x))dt \bmod(\pi) \\
&= \int_{\pi(D)} w + \int_0^1 h_t(\phi_t(x))dt \bmod(\pi) \\
&= \int_D \Omega + \int_0^1 h_t(\phi_t(x))dt \bmod(\pi) \\
&= -\pi\tau \bmod(\pi).
\end{aligned}$$

On a le résultat souhaité. □

Remarque 5.1. Le facteur $-\frac{1}{\pi}$, dans la définition de l'action, est une convention pour avoir égalité entre l'action d'un point fixe et sa valeur d'action essentielle. On peut trouver une autre convention dans par exemple l'ouvrage de McDuff et Salamon [3]

On en déduit alors le résultat suivant sur les points périodiques :

Proposition 5.2. Soit ϕ un symplectomorphisme de $\mathbb{CP}^n$, et soit $t_0, ..., t_n$ ses nombres de rotations, alors pour tout i et tout entier m, $mt_i \bmod(\pi)$ sont des nombres de rotations de ϕ^m.

Démonstration. Il suffit de remarquer que un point fixe de ϕ est un point fixe de ϕ^m et l'action de $\phi_t^m(x)$ est m fois l'action de $\phi_t(x)$ par le calcul. □

Corollary 5.1. *Si le symplectomorphisme ϕ admet exactement $n+1$ points périodique, alors les t_i sont rationnellement indépendants.*

Deuxième partie
Conjecture de Conley.

1 Introduction.

1.1 Résultat principal.

Dans cette partie, nous allons montrer le théorème suivant

Theorème 1.1. *Soit ϕ un difféomorphisme hamiltonien du tore $\mathbb{T}^{2n}$, si les points fixes de ϕ sont isolés, alors ϕ admet des points périodiques simple de période arbitrairement grande.*

Ce résultat fut conjecturé par Conley et démontré récemment par Hingston (2009) dans [5]. On peut également trouver une preuve dans l'article de Ginzburg [4]. Il a pour corollaire que tout hamiltonien du tore admet une infinité de point fixe.

1.2 Organisation de la démonsration.

On commence par donner les conventions utiisées pour les fonctions génératrices. On introduit rapidement l'indice de Maslov d'un point fixe d'un hamiltonien et on démontre quelques propriétés locales. La section 3 introduit la notion cruciale de point symplectique maximalement dégénéré (SDM) et l'on montre que l'existence d'un tel point implique l'éxistence d'une infinité de point périodique sur le tore. Enfin, dans la dernière partie, on démontre l'éxistence d'un SDM pour un hamiltonien C^1-proche del'identité puis pour tout hamiltonien du tore. La démonstration dans le cas C^1-proche de l'identité a été démontré par Mazzucchelli dans [7]. Le cas général s'inspire de ce cas particulier et d'idées développées dans l'article de Ginzburg [4], il représente une grande partie du stage et permet d'aboutir à une nouvelle démonstration quis'avère être moins technique que celle présenté par Ginzburg.

2 Préliminaires.

2.1 Fonction Génératrice.

Soit ϕ un hamiltonien du tore $\mathbb{T}^{2d}$. On considère une décomposition de Chaperon $\phi = \psi_{k-1} \circ ...\psi_0$ tel que pour tout j, on a $\psi_j = \phi^{\frac{j+1}{k}} \circ (\phi^{\frac{j}{k}})^{-1}$. Si l'on relève les hamiltoniens précédent en hamiltoniens $\tilde{\phi}$, $\tilde{\psi}_j$ de $\mathbb{R}^{2d}$, on obitent la décomposition de l'hamiltonien $\tilde{\phi}$ suivante : $\tilde{\phi} = \tilde{\psi}_{k-1} \circ ... \circ \tilde{\psi}_0$.

Si k est suffisament grand, pour tout j, $\tilde{\psi}_j$ est C^1-proche de l'identité. Ainsi, on peut considérer une fonction génératrice $\tilde{f}_j$ de $\tilde{\psi}_j$. C'est à dire que le graphe de $\tilde{f}_j$ correspond à l'image du graphe de $\tilde{\psi}_j$ par le symplectomorphisme $\tau : (\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d}, w_0 \ominus w_0) \rightarrow (T^*\mathbb{R}^{2d}, -d\lambda)$ donné par :

$$\tau(x, y, X, Y) := (X, y, Y - y, x - X).$$

On définit alors la fonction $\tilde{F} : (\mathbb{R}^{2d})^k \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\tilde{F}(x_0, y_0, ..., x_{k-1}, y_{k-1}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_k} (\langle y_j, x_j - x_{j+1} \rangle + \tilde{f}_j(x_{j+1}, y_j)).$$

On vérifie que $\tilde{F}$ passe au quotient en une fonction $F : (\mathbb{R}^{2d})^k / \mathbb{Z}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ et alors on peut obtenir une fonction génératrice de l'hamiltonien ϕ avec la composition de F et du difféomorphisme $\psi : (\mathbb{R}^{2d})^k/\mathbb{Z}^{2d} \to \mathbb{T}^{2d} \times (\mathbb{R}^{2d})^{k-1}$, définie par $\psi(z_0, ..., z_{k-1}) = (z_0, z_1 - z_0, ..., z_{k-1} - z_0)$.

Par la suite, on dira que la fonction génératrice F définie comme précédemment est une fonction génératrice de l'hamiltonien ψ associée à la décomposition de Chaperon $\phi = \psi_{k-1} \circ ... \circ \psi_0$.

On vérifie également que l'on peut obtenir une fonction génératrice $F^{\times n}$: $(\mathbb{R}^{2dk})^n/\mathbb{Z}^{2d} \to \mathbb{R}$ de la n-ième composée ϕ^n par la formule suivante :

$$F^{\times n}(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{kp}} (\langle y_j, x_j - x_{j+1} \rangle + f_{j \text{ mod} k}(x_{j+1}, y_j)).$$

Si l'on considère un point critique z de F correspondant à un point fixe de ϕ. Alors $z^{\times n} := \underbrace{(z, ..., z)}_{\times n}$ est un point critique de $F^{\times n}$.

Soit z un point critique de la fonction génératrice $F^{\times p}$. On note $\text{mor}(z)$ et $\text{nul}(z)$ l'indice de Morse et la nullité de $F^{\times p}$ au point critique z. On a la propriété suivante :

Proposition 2.1. Soit $z \in (\mathbb{R}^{2dk})^p$ un point critique de $F^{\times p}$, alors

$$\text{nul}(z) = \dim ker(d\phi(z_0) - Id).$$

On définit les multiplicateurs de Floquet de ϕ^p en un point fixe z par les valeurs propres de la différentielle $d\phi^p(z)$. On a alors la propiété suivante :

Proposition 2.2. Soit z un point critique d'une fonction génératrice $F^{\times p} : \mathbb{R}^{2dkp}/\mathbb{Z}^{2d} \to \mathbb{R}$ de la p-ième itéré d'un hamiltonien ϕ. Alors pour tout entier $n > 1$ on a que $\text{nul}(z) = \text{nul}(z^{\times n})$ si et seulement si les multiplicateurs de Floquet de ϕ^p en z autre que 1 appartiennent au groupe des racines n-ième de l'unité.

Cette propriété demande l'utilisation des formules de Bott que l'on ne va pas expliquer dans ce rapport. Tous les détails concernant les fonctions de Bott se trouvent dans [6].

2.2 Indice de Maslov.

Pour éviter de surcharger le rapport, cette section sera succinte mais suffisante dans la compréhension de la suite.

On note le groupe linéaire symplectique $Sp(2n)$ de $\mathbb{R}^{2n}$ formé des matrices P telles que ${}^tPJP = J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Il est bien connu que le groupe fondamental de $Sp(2n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Et étant donné un chemin continue $\Gamma : [0,1] \to Sp(2n)$, il existe un indice, l'indice de Maslov qui permet de calculer le nombre de demi-tours de Γ dans le groupe symplectique. On note ce dernier $\mathrm{mas}(\Gamma)$. Pour plus de détail sur la construction on peut se référer à [1] ou encore [7]. On définit également l'indice de maslov moyen d'un chemin continue $\Gamma : [0,1] \to Sp(2n)$ comme la limite suivante :

$$\overline{\mathrm{mas}}(z) := \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{mas}(\Gamma^n)}{n}.$$

On a alors le résultat suivant :

Theorème 2.1 (Inégalités d'itération)**.** *Soit un chemin continue* $\Gamma : [0,1] \to Sp(2d)$ *tel que* $\Gamma(0) = I$ *et soit un entier* $p \in \mathbb{N}$*. Alors*

$$\begin{gathered} p\overline{\mathrm{mas}}(\Gamma) - d \leqslant \mathrm{mas}(\Gamma^p), \\ \mathrm{mas}(\Gamma^p) + \dim ker(\Gamma(1)^p - I) \leqslant p\overline{\mathrm{mas}}(\Gamma) + d \end{gathered} \tag{1}$$

De plus, si l'une des inégalité est une égilité, alors $\sigma(\Gamma(1)^p) = \{1\}$ *et* $\dim ker(\Gamma(1)^p - I) \geqslant d$*. Les deux inégalités sont des égalités si et seulement si* $\Gamma(1)^p = I$*.*

Soit un hamiltonien $\phi : \mathbb{T}^{2d} \to \mathbb{T}^{2d}$ et un flot hamiltonien ϕ^t 1 périodique en t et tel que $\phi^1 = \phi$. On considère également un point z_0, p-périodique contractile de ϕ. On considère alors le chemin $\Gamma : [0, +\infty[\to Sp(2d)$ donné par $\Gamma(t) := d\phi^t(z_0)$. On fait correspondre à z_0 l'unique point critique z de $F^{\times p} : (\mathbb{R}^{2dk})^p/\mathbb{Z}^{2d} \to \mathbb{R}$, la fonction génératrice de ϕ associée à une décomposition de Chaperon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit alors l'indice de morse du point $z^{\times n}$ et l'indice moyen de z par :

$$\begin{gathered} \mathrm{mas}(z^{\times n}) := \mathrm{mas}(\Gamma|_{[0,pn]}), \\ \overline{\mathrm{mas}}(z) := \overline{\mathrm{mas}}(\Gamma|_{[0,p]}) \end{gathered}.$$

Avec les notations précédente, on a l'égalité :

$$\mathrm{mor}(z) = \mathrm{mas}(z) + dkp. \tag{2}$$

On notera aussi $\rho(\Gamma)$ le nombre de tours du lacet Γ, plus précisement, son représentant dans le groupe $\pi_1(Sp(2n))$.

Remarque 2.1. La nullité de l'indice de Maslov moyen permet entre autre d'obtenir des informations sur le nombre de tour d'un lacet Γ, $\rho(\Gamma)$. En effet, le lacet Γ est homotope à un lacet $t \to \mathrm{e}^{2ik\pi}$ où $k = \rho(\Gamma)$. Alors, un calcul développé dans [7], exemple 3.5, montre que l'indice de Maslov d'un tel lacet est donné par une fonction affine du nombre de tours. Ainsi, si l'indice de Maslov moyen du chemin Γ est nul, alors à fortiori $\rho(\Gamma) = 0$. Plus généralement, l'indice de Maslov moyen est égale, à une constante multiplicative près, au nombre de tours. Il existe donc une constante $C \neq 0$ telle que pour tout lacet Γ de symplectomorphismes on a :

$$\overline{\mathrm{mas}}(\Gamma) = C\rho(\Gamma).$$

2.3 Homologie Locale.

Soit M une variété lisse, on considère une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$. On va s'intéresser dans cette sous section à des propriétés homologique de points critique p associé à la valeur $f(p) = c$. On définit alors l'homologie locale de ce point par :

$$C_*(p) := H_*(\{f < c\} \cup \{p\}, \{f < c\}),$$

Les premières propriétés sont locales :

Proposition 2.3. Soit p un point critique isolé d'une fonction lisse $f : M \to \mathbb{R}$ ayant une homologie locale non triviale en degré maximal $k = \mathrm{mor}(p) + \mathrm{nul}(p)$. Alors on a les propriétés suivantes :

1. L'homologie locale de p est concentrée en degré k et est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$.
2. Pour tout plongement lisse d'un k-disque $D \subset M$ contenant p dans son interieur et tel que $f|_{D \backslash p} < f(p)$, le groupe $C_*(p)$ est généré par $[D]$.
3. Soit θ_t l'opposé du gradient de f. Alors il existe un voisinage ouvert arbitrairement petit $\mathcal{U} \subset M$ de p tel que :
   (1) Si pour un $p' \in M$ et $t_1 < t_2$ tels que $\theta_{t_1}(p') \in \mathcal{U}$ et $\theta_{t_2}(p') \in \mathcal{U}$. Alors pour tout $t \in [t_1, t_2]$ on a $\theta_t(p') \in \mathcal{U}$
   (2) Le bord de $\mathcal{U}$ est l'union de trois variétés compactes à bord : la première est dans l'ensemble $\{f \geqslant f(p) + \delta\}$ pour un certain $\delta > 0$,

   $$\mathcal{U}_{in} = \{p' \in \bar{\mathcal{U}} | \theta_{t_1}(p') \notin \bar{\mathcal{U}} \ \forall t < 0\}$$

   La deuxième est dans le sous niveau $\{f < f(p)\}$,

   $$\mathcal{U}_{out} = \{p' \in \bar{\mathcal{U}} | \theta_{t_1}(p') \notin \bar{\mathcal{U}} \ \forall t > 0\}$$

   La troisième $\mathcal{U}_{tan}$ est tangente au flot θ_t.
   (3) L'inclusion induit l' isomorphisme :

   $$C_*(p) \cong H_*(\{f < f(p)\} \cup \mathcal{U}, \{f < f(p)\}.$$

Démonstration. Le résultat étant locale, on peut se ramener à $M = \mathbb{R}^N$ et $p = 0$. On note $m := \mathrm{mor}(p)$ et $n := \mathrm{nul}(p)$ tels que $k = m + n$. Par le lemme de Morse ([1], théorème 1.3.1) on peut également considérer f de la forme $f(x_0, x_-, x_+) = f_0(x_0) - |x_-|^2 + |x_+|^2$ où $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_- \in \mathbb{R}^m$, $x_+ \in \mathbb{R}^{N-k}$ et $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de hessienne nulle à l'origine. Par le lemme de Gromoll-Meyer ([2],page 50) on a $C_*(p) \cong C^0_{*-m}(p)$. En particulier, on a que $C_k(p) \cong C^0_n(p)$ est non triviale. Ce qui implique que l'origine est un maximum locale isolé de f_0 et donc que l'homologie locale de l'origine est concentré en degré maximal. On a le premier point.

On considère maintenant un disque D vérifiant les hypothèses de 2. et on définit le set :

$$E^+ := \{(x_0, x_-, x_+) \in \mathbb{R}^N | x_0 = 0, x_- = 0\}.$$

On vérifie alors que D est transverse à E^+. En effet, si il existe un vecteur non nul $v \in T_pD \cup E^+$, alors on considère un chemin $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to D$ tel que $\dot{\gamma}(0) = v$. Alors on a :

$$\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0} f \circ \gamma(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0} df(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \underbrace{\mathrm{Hess}(f(p))[v,v]}_{>0} + \underbrace{df(p)\ddot{\gamma}(0)}_{=0} > 0,$$

Ce qui contredit l'hypothèse $f < 0$ sur $D \backslash p$.

On pose alors :

$$B_*(r) := \{(x_0, x_-) \in \mathbb{R}^k | \ |x_0|^2 + |x_-|^2 \leqslant r^2\}.$$

Par le théorème des fonctions implicites, il existe un $r > 0$ et une fonction lisse $\psi : B_*(r) \to \mathbb{R}^{N-k}$ tel que le disque

$$D' := \{(x_0, x_-, \psi(x_0, x_-)) | \ (x_0, x_-) \in B_*(r)\}$$

soit un voisinage compact de l'origine dans D. On a de plus $[D'] = [D]$.

On considère l'isotopie $h_t : B_*(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ donnée par

$$h_t(x_0, x_-) = (x_0, x_-, (1-t)\psi(x_0, x_-)).$$

Grâce à un calcul on obtient $\frac{d}{dt} f \circ h_t(z) = -2|\psi(z)|^2$. et donc l'isotopie vérifie $\frac{d}{dt} f \circ h_t \leqslant 0$ soit encore que $f \circ h_t|_{B_*(r)} < 0$. Ainsi, $[D'] = [h_1(B_*(r))]$ dans $C_k(p)$. Et on obtient le résultat 2.

La construction de l'ouvert $\mathcal{U}$ est un peu plus technique et pour simplifier on se place dans la métrique induite par $\mathbb{R}^N$. On utilise les mêmes notations que précédement, et on note $c := f(0)$. On considère la fonction $f_* : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ donnée par $f_*(x_0, x_-) = f_0(x_0) - |x_-|^2$. Et soit $\epsilon > 0$ tel que $f_*|_{B_*(\epsilon)}$ n'admet que l'origine comme point critique. On peut alors trouver un δ_1 tel que

$$K := B_*(\epsilon) \cap \{f_* = c - \delta_1\},$$

soit un voisinage compact de l'origine inclus dans l'intérieur de la boule $B_*(\epsilon)$, de bord $\partial K = B_*(\epsilon) \cap \{f_* = c - \delta_1\}$. Soit $\tau > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \tau]$, l'image de ∂K par le flot θ_t^* de f_* soit toujours contenue dans l'intérieur de $B_*(\epsilon)$.

Vu que l'origine est le seul point fixe du flot θ_t^* dans $B_*(\epsilon)$, alors il existe un $\delta_2 \in]\delta_1, \epsilon^2[$ tel que

$$\theta_\tau^*(\partial K) \subset \{f_* \geqslant c - \delta_2\}.$$

Pour un $r > 0$, on note $B_+(r) := \{x_+ \in \mathbb{R}^{N-k} |\ |x_+|^2 \geqslant r^2\}$. On définit alors l'ensemble

$$\mathcal{U}_{in} := K \times \partial B_+(\sqrt{\delta_2}).$$

On a alors que pour tout élément (x_0, x_-, x_+) de $\mathcal{U}_{in}$, $f(x_0, x_-, x_+) = f_*(x_0, x_-) + \delta_2 \geqslant c - \delta_1 + \delta_2 = c + \delta$ où $\delta := \delta_2 - \delta_1 > 0$.

Vu que l'on peut écrire le flot $\theta_t(x_0, x_-, x_+) = (\theta_t^*(x_0, x_-), \theta_t^+(x_+))$ alors il existe un δ_3 tel que $\theta_t(\partial K \times \partial B_+(\sqrt{\delta_2})) = \theta_t^*(\partial K) \times \partial B_+(\sqrt{\delta_3}))$. Et l'on définit alors

$$\mathcal{U}_{out} := \theta_t^*(\partial K) \times B_+(\sqrt{\delta_3})),$$
$$\mathcal{U}_{tan} := \bigcup_{t \in [0,\tau]} \theta_t(\partial K \times \partial B_+(\sqrt{\delta_2})).$$

Alors on a que $V := U_{in} \cup U_{out} \cup U_{tan}$ sépare $\mathbb{R}^N$ et l'on définit $\mathcal{U}$ comme la composante connexe du complémentaire de V contenant l'origine. L'ouvert $\mathcal{U}$ est donc inclus dans l'intérieur de $B_*(\epsilon) \times B_+(\epsilon)$ et l'adhérence $\bar{\mathcal{U}}$ est égale à l'union des ensembles U_{in} et U_{out}. De plus, pour tout $(x_0, x_-, x_+) \in U_{out}$ on a :

$$f(x_0, x_-, x_+) = f_*(x_0, x_-) + \delta_3 < c - \delta_2 + \delta_3 < c.$$

Soit $\rho : \mathbb{R}^N \to [0,1]$ une fonction lisse de support inclus dans $B_*(\epsilon) \times B_+(\epsilon)$ et tel que $\rho|_{\mathcal{U}} \equiv 1$. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose l'homotopie $k_t : (\{f < c\} \cup \mathcal{U}, \{f < c\}) \to: (\{f < c\} \cup \mathcal{U}, \{f < c\})$, définie par $k_t(x_0, x_-, x_+) = (x_0, x_-, (1 - t\rho(x_0, x_-, x_+))x_+)$.

On remarque que k_0 est l'identité, la composition avec f est décroissante et l'on a :

$$f \circ k_1(x_0, x_-, x_+) = f((x_0, x_-, 0) = f_*(x_0, x_-).$$

En particulier, $k_1(\mathcal{U}) \subset \{f < c\} \cup \{p\}$, et k_1 est donc une homotopie d'équivalence

$$k_1 : (\{f < c\} \cup \mathcal{U}, \{f < c\}) \to (\{f < c\} \cup \{p\}, \{f < c\})$$

d'homotopie inverse donnée par l'inclusion. Ainsi, l'inclusion induit un isomorphisme en homologie entre $C_*(p)$ et $H_*(\{f < c\} \cup \mathcal{U}, \{f < c\})$. $\square$

On peut alors montrer la propriété suivante :

Proposition 2.4. Soit M une variété Riemannienne et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse satisfaisant la condition de Palais-Smale. On suppose que f admet un point critique isolé p avec homologie locale non triviale en degré maximal $\mathrm{mor}(p) + \mathrm{nul}(p)$. Soit $c := f(p)$, si il existe $b > c$ tel que l'intervalle $]c, b]$ ne contient pas de valeur critique de f, alors on obtient le morphisme non trivial induit par l'inclusion :

$$i_* : C_*(p) \to H_*(\{f < b\}, \{f < c\}).$$

Démonstration. Comme le point p vérifie les hypothèses de la propriété précédente, on peut considérer un ouvert $\mathcal{U}$ vérifiant les propriétés de 2.1. Ainsi, il existe $\delta \in]0, b-c[$ tel que l'ouvert $\mathcal{U}_{in}$ soit compris dans le sous niveau $\{f \geqslant c+\delta\}$. Soit C l'ensemble compact des points critiques de f de valeur critique c. On considère $C' := C \backslash p$ et un voisinage ouvert V' de C' qui est relativement compact dans $\{f < c+\delta/2\}$ et tel que $\bar{V'} \cap \bar{\mathcal{U}} = \emptyset$. On définit alors l'ouvert :

$$V := \bigcup_{t \in [0,+\infty[} \theta_t(V').$$

On vérifie que l'on a alors construit un ouvert positivement invariant par le flot θ_t qui vérifie $V \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Et donc quitte à considérer un ouvert $\mathcal{U}$ vérifiant les propriétés de 2.1, on peut supposer que $\bar{V} \cap \bar{\mathcal{U}} = \emptyset$. Par les propriétés de $\mathcal{U}$ on vérifie également que l'ensemble $\{f < c\} \cup V \cup \mathcal{U}$ est positivement invariant par le flot θ_t. De plus, comme l'ensemble $\{f \leqslant b\} \backslash (\{f < c\} \cup V \cup \mathcal{U})$, ne contient pas de point critique de f, alors on peut déformer via le flot θ_t la paire $(\{f < b\}, \{f < c\})$ sur la paire $(\{f < c\} \cup V \cup \mathcal{U}, \{f < c\})$. Ce qui implique que l'inclusion induit un isomorphisme :

$$i'_* : H_*(\{f < c\} \cup V \cup \mathcal{U}, \{f < c\})) \xrightarrow{\cong} H_*(\{f < b\}, \{f < c\}).$$

De plus, comme $\bar{V} \cup \bar{\mathcal{U}} = \emptyset$, alors par excision on a l'isomorphisme

$$H_*(\{f < c\} \cup V \cup \mathcal{U}, \{f < c\})) \cong H_*(\{f < c\} \cup V, \{f < c\})) \oplus H_*(\{f < c\} \cup \mathcal{U}, \{f < c\})).$$

Or par 2.1, l'inclusion induit l'isomorphisme

$$C_* \cong H_*(\{f < c\} \cup \mathcal{U}, \{f < c\})).$$

Ainsi, on obtient le morphisme injectif

$$i"_* : C_* \hookrightarrow H_*(\{f < c\} \cup V \cup \mathcal{U}, \{f < c\})).$$

D'où, comme $i'_* \circ i"_* = (i' \circ i")_*$, alors l'inclusion induit bien le morphisme souhaité. $\square$

3 Point symplectique maximalement dégénéré.

On considère toujours un hamiltonien ϕ du tore $\mathbb{T}^{2d}$. On considère la fonction génératrice $F : \mathbb{R}^{2dk} \to \mathbb{R}$ associée à la décomposition de Chaperon $\phi = \psi_{k-1} \circ \ldots \circ \psi_0$. De plus, on note f_j les fonctions génératrice des hamiltoniens ψ_j.

On considère un point fixe contractile p de ϕ. On suppose de plus que p est point fixe contractile de tous les ψ_j. Alors on peut associer à p un point critique

$z_0^{\times k}$ de F tel que z_0 soit un point critique des f_j. On dit alors que le point z_0 est un point symplectique maximalement dégénéré (que l'on notera SDM) si il vérifie les deux conditions suivante :

$(SDM1)$ Le point z_0 est un maximum local isolé des fonctions génératrices $f_0, ..., f_{k-1}$,

$(SDM2)$ L'homologie locale $C_{dkn}(z_0^{\times kn})$ est non trivial pour une infinité de n.

On pourra aussi dire par abus de notation qu'un point p est un SDM d'un hamiltonien ϕ pour une certaine fonction génératrice F. On note $\mathbb{K}_{z_0}$ le sous ensemble infini de $\mathbb{N}$ des entiers n vérifiants (SDM2). La condition (SDM2) impose de fortes contraintes sur l'indice de Morse etl'homologie locale d'un SDM. On peut formuler ces contraintes par la proposition suivante :

Proposition 3.1. Soit $z = (z_0, ..., z_{k-1})$ un point critique de F tel que pour une infinité d'entier n, le point $z^{\times n}$ est un point critique isolé de $F^{\times n}$ et que l'homologie locale $C_{dkn+d}(z^{\times n})$ est non triviale. On note K_z le sous ensemble de $\mathbb{N}$ des entiers vérifiant cette propriété. Alors pour tout n dans $\mathbb{K}_z$ on a :

(i) $\mathrm{mor}(z^{\times n}) + \mathrm{nul}(z^{\times n}) = dkn + d$,

(ii) 1 est le seul mutliplicateur de Floquet de ϕ^n au point z_0,

(iii) l'homologie locale de $z^{\times n}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$ et est concentré en degré maximal $dkn + d$, c'est à dire $C_*(z^{\times n}) \cong C_{dkn+d}(z^{\times n}) \cong \mathbb{Z}_2$,

(iv) les multiples de n sont dans K_z,

(v) si m divise n, alors $\mathrm{nul}(z^{\times m}) = \mathrm{nul}(z^{\times n})$, et alors $m \in \mathbb{K}_z$.

(vi) si 1 est le seul multiplicateur de Floquet de ϕ en z_0, alors $\mathbb{K}_z = \mathbb{N}$

Démonstration. L'hypothèse sur l'homologie locale implique que pour tout $n \in \mathbb{K}_z$ on a les inégalités :

$$\mathrm{mor}(z^{\times n}) \leqslant dkn + d \leqslant \mathrm{mor}(z^{\times n}) + \mathrm{nul}(z^{\times n}),$$

Par l'équation (2), on obtient :

$$\mathrm{mas}(z^{\times n}) \leqslant dkn + d \leqslant \mathrm{mas}(z^{\times n}) + \mathrm{nul}(z^{\times n}),$$

En particulier on a donc que $\overline{\mathrm{mas}}(z) = 0$. Et donc par l'équation (1) des inégalités d'itération on a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{mas}(z^{\times n}) + \mathrm{nul}(z^{\times n}) \leqslant d,$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{K}_z$:

$$\mathrm{mas}(z^{\times n}) + \mathrm{nul}(z^{\times n}) \leqslant d.$$

On a donc prouvé (i). Le point (ii) découle du cas d'égalité du théorème. En combinant (i) et la proposition 2.3 on obtient (iii). On suppose maintenant qu'il existe des entiers n, m vérifiant les hypothèses de (v). Par la proposition 2.2 et le point (ii), on sait que 1 est le seul multiplicateur de Floquet de ϕ^m au point z_0. Par l'équation (2) on a

$$\mathrm{mas}(z^{\times m}) = \mathrm{mas}(z^{\times n}).$$

Soit le $N_m \subset (\mathbb{R}^{2d})^{km}/\mathbb{Z}^{2d}$ une sous variété invariante par le flot gradient de $F^{\times m}$ tel que $T_{z^{\times m}}N_m$ soit le noyau de la hessienne de $F^{\times m}$ en $z^{\times m}$. En particulier, $\dim(N_m) = \mathrm{nul}(z^{\times m})$ et on considère le plongement diagonal :

$$\psi^{\times n/m} : (\mathbb{R}^{2d})^{km}/\mathbb{Z}^{2d} \hookrightarrow (\mathbb{R}^{2d})^{kn}/\mathbb{Z}^{2d}$$

donné par $\psi^{\times n/m}(w) = w^{\times n/m}$. On montre par la calul que

$$\nabla F^{\times n} \circ \psi^{\times n/m} = \psi^{\times n/m} \circ \nabla F^{\times m},$$

Si on pose $N_n := \psi^{\times n/m}(N_m)$, alors N_n est invariante par le flot gradient de $F^{\times n}$ et de plus

$$\dim(N_n) = \dim(N_m) = \mathrm{nul}(z^{\times m}) = \mathrm{nul}(z^{\times n}),$$

D'où $T_{z^{\times n}}N_n$ est le noyau de la hessienne de $F^{\times n}$ en $z^{\times n}$. Ainsi, si on pose $c := F(z)$ alors on a

$$\begin{aligned} C_{*+\mathrm{mor}(z^{\times n})}(z^{\times n}) &\cong H_*(\{F^{\times n}|_{N_n} < nc\} \cup \{z^{\times n}\}, \{F^{\times n}|_{N_n} < nc\}) \\ &\cong H_*(\{F^{\times m}|_{N_m} < mc\} \cup \{z^{\times n}\}, \{F^{\times m}|_{N_m} < mc\}) \\ &\cong C_{*+\mathrm{mor}(z^{\times m})}(z^{\times m}), \end{aligned} \tag{3}$$

Avec l'équation (2), on trouve

$$\mathrm{mor}(z^{\times n}) = \mathrm{mor}(z^{\times m}) + dk(n-m).$$

En combinant ce résultat avec l'équation (3), on a que $C_{dkm+d}(z^{\times m}) \cong C_{dkn+d}(z^{\times n})$ et l'on a prouvé (v). Le point (iv) se montre de façon analogue. Le dernier point découle alors des résultats $(iv-v)$ et de la proposition 2.2 $\square$

Lemme 3.1. *Soit z_0 un point SDM d'un hamiltonien $\phi = \psi_{k-1} \circ \ldots \circ \psi_0 : \mathbb{T}^{2d} \to \mathbb{T}^{2d}$. Soit f_i les fonctions génératrices des symplectomorphismes ψ_j. On suppose de plus que z_0 est un point fixe contractile isolé de ϕ^n pour tout $n \in \mathbb{K}_{z_0}$. Alors, si l'on pose $c = F(z_0^{\times k})$ et soit $\epsilon > 0$ on a que le morphisme induit par inclusion :*

$$i_* : C_*(z_0^{\times kn}) \to H_*(\{F^{\times n} < nc + \epsilon\}, \{F^{\times n} < nc\})$$

est trivial pour tout n assez grand.

Démonstration. Pour simplifier les notations, on va travailler sur $\mathbb{R}^{2dkn}$ au lieu du domaine fondamentale $\mathbb{R}^{2dkn}/\mathbb{Z}^{2d}$ de F. De plus, on peut supposer que $z_0 = 0$ et $c = f_0(0) = ... = f_{k-1}(0) = 0$. Soit $R > 0$ assez petit pour que pour tout j, $f_j < 0$ dans une boule de rayon $3R$ centrée en 0. On considère le sous espace vectoriel de dimesion $(dkn + d)$ suivant :

$$E_n = \{z = (x_0, y_0, ..., x_{kn-1}, y_{kn-1}) | x_0, ..., x_{kn-1}, w \in \mathbb{R}^d \text{et } y_j = w + x_{j+1} - x_j \ \forall j \in \mathbb{Z}_{kn}\},$$

et, pour tout $0 < r < R$, on considère le polydisque :

$$W_n = W_n(R, r) = \{z \in E_n | \ |x_0| \leqslant R, ..., |x_{kn-1}| \leqslant R, |w| \leqslant r\}.$$

On évalue la fonction génératrice $F^{\times n}$ sur les W_n :

$$F^{\times n}(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{kn}} (-|x_j - x_{j+1}|^2 + f_j(x_{j+1}, w + x_{j+1} - x_j)) < 0, \ \forall z \in W_n.$$

Ainsi, par les propositions 2.3 et 3.1, $[W_n]$ est un générateur de l'homologie locale de $F^{\times n}$ en $0^{\times n}$.

Considérons maintenant un vecteur v de norme égale à r et on pose l'homotopie $h : [0, 1] \times W_n \to \mathbb{R}^{2dn}$ définie par :

$$h(t, z) = z + tz',$$

avec $z = (x_0, y_0, ..., x_{kn-1}, y_{kn-1})$, $z' = (0, y'_0, ..., 0, y'_{kn-1})$ et

$$\begin{aligned} y'_i &= 0, \ \forall i \in \{0, ..., kn' - 1\}, \\ y'_i &= v, \ \forall i \in \{kn', ..., kn - 1\}. \end{aligned}$$

pour un certain n'. On calcul alors :

$$\begin{aligned} F^{\times n} \circ h(t, z) = & \sum_{j=0}^{kn'-1} (-|x_j - x_{j+1}|^2 + f_j(x_{j+1}, w + x_{j+1} - x_j)) \\ & + \sum_{j=kn'}^{kn-1} (-|x_j - x_{j+1}|^2 + f_j(x_{j+1}, tv + w + x_{j+1} - x_j)) \\ & + t\langle v, x_{kn'} - x_0 \rangle. \end{aligned}$$

Soit une fonction croissante, monotone et continue $\rho : [0, R] \to [0, \infty[$ telle que :

$$\rho(s) \leqslant min\{s^2, \min_{|z"|=s, \ j \in \mathbb{Z}_k} \{-f_j(z")\}\}.$$

Alors pour tout u dans la boule de rayon R et tout $j \in \mathbb{Z}_k$ on peut écrire l'inégalité suivante :

$$-|x_j - x_{j+1}|^2 + f_j(x_{j+1}, u + x_{j+1} - x_j) \leqslant -\rho(\frac{|u|}{2}).$$

On veut maintenant estimer l'expression donnée par $F^{\times n} \circ h(t,z)$. On remarque que $|v| = r \geqslant |w|$, d'où pour au moins un des vecteurs v ou $v+w$ a une norme plus grande que $\frac{r}{2}$. Ainsi, il suffit de choisir $r < \frac{\epsilon}{2R}$, $n' > \frac{2Rr}{\rho(\frac{r}{4})k}$ et $n > 2n$. On obtient alors les inégallités suivantes :

$$F^{\times n} \circ h(t,z) \leqslant t\langle v, x_{kn'} - x_0\rangle \leqslant t|v||x_{kn'} - x_0| \leqslant 2Rr < \epsilon$$
$$F^{\times n} \circ h(1,z) \leqslant -kn'\rho(\frac{r}{4}) + \langle v, x_{kn'} - x_0\rangle \leqslant -kn'\rho(\frac{r}{4}) + 2Rr < 0$$

Ansi, on a montré que l'homotopie h déforme W_n dans le sous niveau $\{F^{\times n} < 0\}$ et que W_n reste dans le sous niveau $\{F^{\times n} < \epsilon\}$ sur toute l'homotopie. Pour terminer, il suffit donc de montrer que le bord de W_n reste bien dans le sous niveau $\{F^{\times n} < 0\}$ le long de l'homotopie. On se ramène à traiter deux cas : Si $|w| = r$, alors

$$\begin{aligned} F^{\times n} \circ h(t,z) &\leqslant -kn'\rho(\frac{|w|}{2}) + t\langle v, x_{kn'} - x_0\rangle \\ &\leqslant -kn'\rho(\frac{r}{2}) + 2Rr \\ &\leqslant -kn'\rho(\frac{r}{4}) + 2Rr \\ &< 0. \end{aligned}$$

Sinon, il existe au moins un j tel que $|x_j| = R$, et on a :

$$F^{\times n} \circ h(t,z) \leqslant f_{j-1}(x_j, y_{j-1} + ty'_{j-1}) + t\langle v, x_{kn'} - x_0\rangle \leqslant -\rho(R) + 2Rr < 0.$$

□

Ce résultat implique l'éxistence d'un infinité de points périodique de valeur critique se trouvant sur un voisinage de la valeur critique associée à z_0. On peut reformuler cela grâce au théorème suivant :

Theorème 3.1. *Soit p un SDM pour un hamiltonien $\phi = \psi_{k-1} \circ ... \circ \psi_0$ du tore $\mathbb{T}^{2d}$. Si l'on suppose que z_0 est un point isolé dans l'ensemble des points fixe contractile de ϕ^n pour tout $n \in \mathbb{K}_p$. Alors, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{K}_p$ et une suite $\{p_n |\ n \in \mathbb{K}_p,\ n \geqslant n_0\}$ de points périodique contractile de ϕ avec les propriétés suivantes : z_n est b-périodique et si l'on note z_n les points critiques de $F^{\times n}$ corespondant à p_n, alors on a $F^{\times n}(z_n) > F^n(p^{\times kn})$ et*

$$\lim_{n \to \infty} (F^{\times n}(z_n) - F^n(p^{\times kn})) = 0.$$

Démonstration. Par l'absurde, on considère qu'une telle suite n'existe pas. Alors il existe un $\epsilon > 0$ and un sous ensemble infini de $\mathbb{K}_p$ tel que pour tout entier n dans cet sous ensemble, $F^{\times n}$ n'admet pas de valeur critique dans l'interval $]nc, nc + \epsilon]$ où $c := F(p^{\times n})$. Ainsi, le point $p^{\times kn}$ vérifie les hypothèses du lemme ? !. Ainsi on obtient l'existence d'un morphisme non trivial :

$$i_* : C_*(p^{\times n}) \to H_*(\{F^{\times n} < nc + \epsilon\}, \{F^{\times n} < nc\}).$$

Or le résultat du lemme précédent implique que i_* soit trivial pour n assez grand. On obtient donc la contradiction. □

Remarque 3.1. Grâce à ce résultat, pour démontrer la conjecture de Conley, il suffit de montrer l'existence d'un point SDM d'un hamiltonien pour une certaine fonction génératrice. Ceci est relativement facile dans le cas particulier où l'hamiltonien est C^1-proche de l'identité, qui est traîté dans la première partiede la démonstration.

4 Démonstration du théorème.

4.1 Cas C^1-proche de l'identité.

Dans cette partie on considère un hamiltonien ϕ C^1-proche de l'identité sur $\mathbb{T}^{2d}$ tel qu'il admette une fonction génératrice F sans variable auxiliaire. On démontre alors le résultat suivant :

Proposition 4.1. Soit un hamiltonien ϕ de $\mathbb{T}^{2d}$ qui soit C^1-proche de l'identité. Si l'ensemble des points fixe contractile est fini, alors ϕ admet un point périodiqe contractile de période p pour tout nombre premier p assez grand.

Démonstration. On va raisonner par l'absurde. Si la propriété n'est pas vrai, alors pour un ensemble $\mathbb{K}$ infini de nombre premier, tous les points périodiques de période p sont des points fixes de ϕ. Pour obtenir une contradiction on va démontrer l'existence d'un point fixe SDM pour la fonction génératrice F de ϕ.

On remarque que pour tout élément p de $\mathbb{K}$ assez grand, les multiplicateurs de Floquet des points périodiques de période p sont tous égaux à 1. On note $\mathbb{K}'$ cet ensemble. Ainsi, tout point fixe conractile z_0 de ϕ a seulement 1 comme multiplicateurs de Floquet. Soit encore pour tout élément n de $\mathbb{K}'$ on a :

$$\mathrm{nul}(z_0) = nul(z_0^{\times n}).$$

Si l'on considère un élément n de $\mathbb{K}'$, alors par hypothèse on sait que la fonction $F^{\times n} : \mathbb{R}^{2dn}/\mathbb{Z}^{2d} \to \mathbb{R}$ admet un nombre fini de point critique. On considère alors c assez grand tel que tous les points critiques de $F^{\times n}$ soient compris dans $] - c, c[$.

En utilisant le changement de variable décrit dans McDuff Salamon ([3],page 352), on se ramène à la fonction $F^{\times n} : \mathbb{T}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d(n-1)} \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $z_0 \in \mathbb{T}^{2d}$ et tout $\eta \in \mathbb{R}^{2d(n-1)}$, $F^{\times n}$ est de la forme :

$$F^{\times n}(z_0, \eta) = Q(\eta) + B(z_0, \eta).$$

On a que Q est une forme quadratique non dégénéré d'indice de Morse $dn - d$. On définit alors :

$$N(r) := \{(z_0, \eta) \in \mathbb{T}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d(n-1)} | Q(\eta) \leqslant r\},$$
$$L(r) = \{(z_0, \eta) \in N(r) | Q(\eta) \leqslant -r\}.$$

Par le théorème de Künneth et le théorème d'excision, on a :

$$H_j(N(r), L(r)) \cong H_{j-(dn-d)}(\mathbb{T}^{2d}).$$

Il suffit alors d'utiliser le gradient de $F^{\times n}$ pour déformer $N(r)$ sur le sous niveau $\{F^{\times n} < c\}$ et $L(r)$ sur le sous niveau $\{F^{\times n} < -c\}$. On obtient alors

$$H_{dn+d}(\{F^{\times n} < c\}, \{F^{\times n} < -c\}) \cong H_{dn+d}(N(r), L(r)) \cong H_{2d}(\mathbb{T}^{2d}) \neq 0.$$

Ainsi, il existe un point critique $z(n)$ de $F^{\times n}$ tel que

$$C_{dn+d}(z(n)) \neq 0.$$

Par hypothèse, l'entier n étant un élément de $\mathbb{K}'$, d'où le point périodique $z(n)$ correspond à un point fixe de ϕ. Or ϕ admettant un nombre fini de points fixe, alors il y a un ensemble infini $\mathbb{K}$" de $\mathbb{K}'$, tel que pour tout n de $\mathbb{K}$" $z(n)$ correspond au même point fixe. Et donc $z(n) = z_0^{\times n}$ pour tout $n \in \mathbb{K}$". Ainsi on a trouvé un point vérifiant la condition (SDM2).

De plus, pour tout $n \in \mathbb{K}$", le seul multiplicateur de Floquet de ϕ^n en z_0 est 1. D'où, comme $\mathbb{K}$" est infini, alors les multiplicateurs de Floquet de ϕ en z_0 est 1. Ainsi par les résultats précédents, on a que $C_{2d}(z_0) \neq 0$ et donc z_0 correspond à un maximum local et isolé de F. Et donc z_0 est bien un point fixe maximalement dégénéré de ϕ. □

Remarque 4.1. Si l'on ne suppose plus ϕ C^1-proche de l'identité, alors à l'exception du dernier paragraphe, la preuve reste valable. Si l'on décompose $\phi = \psi_{k-1} \circ \ldots \circ \psi_0$ et $F^{\times 1} : \mathbb{R}^{2dk}/\mathbb{Z}^{2d} \to \mathbb{R}$ sa fonction génératrice, alors on trouve un point fixe z_0 tel que pour une infinité de n :

$$C_{dkn+d}(z_0^{\times n}) \neq 0.$$

Ainsi, on conserve la propriété sur les multiplicateurs de Floquet, mais on ne peut pas assurer que ce point fixe correspond à des maximum locaux des fonctions génératrices des ψ_j.

4.2 Cas général.

4.2.1 Changement d'hamiltonien.

L'étude faite par Mazzucchelli dans [7] s'arrète là, on va cependant utiliser les idées développées précédement pour élaborer une nouvelle démonstration complète.

On considère donc un hamiltonien ϕ du tore $\mathbb{T}^{2d}$ et un point fixe contractile p vérifiant les propriétés de le remarque 4.1 pour un hamiltonien H. On va montrer que l'on peut considérer un hamiltonien $\tilde{H}$ tel que son flot $\tilde{\phi}^t_{\tilde{H}}$ en temps 1 soit égale à ϕ et que pour tout t on a $\phi^t_{\tilde{H}}(p) = p$ et le point p vérifie les propriétés de la remarque 4.1 pour cet hamiltonien $\tilde{H}$. Avant cela on va énoncer et démontrer des propriétés sur l'homologie locale.

Soit ϕ, vérifiant les hypothèses précédentes. On note $F : (\mathbb{R}^{2d})^k/\mathbb{Z}^{2d} \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice associée à une décomposition de Chaperon $\phi = \psi_{k-1} \circ ... \circ \psi_0$ où les ψ_j sont construits à partir du flot d'un hamiltonien H. On note z_0 le point critique de F correspondant au point fixe p de ϕ. On va démontrer que le groupe d'homologie locale

$$Loc_*(F, z_0) := C_{*-dk}(F, z_0),$$

est invariant par ce que l'on appelera une stabilisation. De plus, si l'on choisit k assez grand, alors le groupe d'homologie local précédent est également invariant par rapport à k.

Le premier point fait appel au lemme, dit de stabilisation, que l'on peut trouver dans [6] sous la forme suivante :

Lemme 4.1 (Stabilisation). *Si l'on considère un hamiltonien ϕ de $\mathbb{R}^{2d}$, et une factorisation $\phi = \psi_{k-1} \circ ... \circ \psi_0$ d'hamiltoniens C^1-prochent de l'identité et une famille de fonctions génératrice f_j associée à cette factorisation et $F : \mathbb{R}^{2dk}$ la fonction génératrice de ϕ correspondante. Si l'on considère la factorisation où l'on a composé par $l-k$ identités à gauche, ce que l'on appellera une stabilisation de ϕ, : $\phi = id \circ ... \circ id \circ \psi_{k-1} \circ ... \circ \psi_0$. Alors on obtient une nouvelle fonction génératrice F' de ϕ définie sur $\mathbb{R}^{2dl}$. On considère que 0 est un point fixe de ϕ. On lui associe le point critique z_0 de F et z_0' de F'. On a les résultats suivant :*

$$\begin{aligned} \mathrm{nul}(F', z_0') &= \mathrm{nul}(F, z_0), \\ \mathrm{ind}(F', z_0') &= \mathrm{ind}(F, z_0) + d(l-k). \end{aligned}$$

On énonce maintenant un lemme d'interpolation que l'on va utiliser à plusieurs reprises par la suite. Il relie deux décompositions différentes d'un hamiltonien ϕ de la façon suivante :

Lemme 4.2 (interpolation). *Soit un hamiltonien ϕ sur V un ouvert de $\mathbb{R}^{2d}$. Soit un hamiltonien H tel le flot associé en temps 1 soit égale à ϕ sur $\mathcal{V}$. On peut écrire*

ϕ des deux façons suivantes : $\phi = id \circ ... \circ \phi$ où l'on répète $k-2$ fois l'identité, ou $\phi = \psi_{k-1} \circ ... \circ \psi_0$ où ψ_j est une décomposition de Chaperon associée à H. On va alors interpoler ces deux écritures. On définit alors β_j^t de la façon suivante :

$$\forall t \in [\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}] \begin{cases} \beta_0^t = \psi_j^{kt} \circ ... \circ \psi_0 \\ \beta_i^t = id \ \forall i \in [1, j-1] \\ \beta_j^t = \psi_j \circ (\psi_j^{kt})^{-1} \\ \beta_i^t = \psi_i \ \forall i \geqslant j+1 \end{cases}$$

On alors pour tout t : $\phi = \beta_{k-1}^t \circ ... \circ \beta_0^t$..

Remarque 4.2. Malgré que les ψ_j et ϕ soient C^1-proches de l'identité, on ne peut pas choisir des fonctions génerarices sans variables auxiliaires pour les β_j^t sur $\mathcal{V}$, car ses derniers peuvent ne pas être C^1-proches de l'identité.

Afin de démontrer la deuxième propriété, il faut palier au problème de la remarque précédente. Pour cela on utilise le lemme suivant :

Lemme 4.3. *On peut choisir une décomposition de ϕ sous la forme $\phi = \psi_{k-1} \circ ... \circ \psi_0$ avec k assez grand tel que pour tout j et tout $t \in [0,1]$, ψ_j^t soient C^1-proche de l'identité.*

Démonstration. En effet, soit $\epsilon > 0$ suffisament petit. On rappel que le flot ϕ_H^t vérifie $\phi_H^0 = id$ et $\phi_H^1 = \phi$. D'où, comme le tore est compact, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \delta]$ et pour tout $z \in \mathbb{T}^{2d}$ on a :

$$|\phi_t(z) - z|_{C^1} < \epsilon.$$

Ainsi, si l'on choisit un k_1, suffisament grand tel que $\frac{1}{k_1} < \delta$ et alors l'isotopie ψ_0^t reste C^1-proche de l'identité sur le tore. On répète l'opération avec $\phi_H^t \circ (\phi_H^{\frac{1}{k_1}})^{-1}$ où $t \in [\delta, 1]$. Ainsi on obtient un découpage fini de $[0,1]$. Et une suite $k_1, ..., k_n$ telle que pour tout $t \in [\frac{1}{k_1} + ... + \frac{1}{k_i}, \frac{1}{k_{i+1}}]$:

$$\phi_H^t \circ (\phi_H^{\frac{1}{k_i}})^{-1} \ C^1\text{-proche de l'identité.}$$

Il suffit alors de considérer $k = k_1 \times ... \times k_n$, et on obtient le résultat demandé. □

En considérant le k du lemme précédent, on va montrer que l'on peut raffiner la décomposition de ϕ, et ainsi démontrer le propriété (ii) de la proposition 9.2.

Lemme 4.4 (Raffinement)**.** *En considérant le k de lemme précédent et F la fonction génératrice de ϕ associé à la décomposition $\phi = \psi_{k-1} \circ ... \circ \psi_0$. Soit m un entier positif. On considère la fonction génératrice F_l associée à la décomposition $\phi = \psi_{k-1,m-1} \circ ... \circ \psi_{0,0}$, telle que pour tout j on a*

$$\psi_j = \psi_{j,m-1} \circ ... \circ \psi_{j,0} \text{ tel que } \psi_{j,i} := \phi_H^{\frac{i+1+mj}{mk}} \circ (\phi_H^{\frac{i+mj}{mk}})^{-1}.(1)$$

On associe la fonction génératrice F_m à cette décomposition de Chaperon et z_m le point critique de F_m associé à p. Et alors on a :

$$Loc_*(F_m, z_m) \cong Loc_*(F, z).$$

Démonstration. On note $F_m : (\mathbb{R}^{2d})^{mk}/\mathbb{Z}^{2d} \to \mathbb{R}$, la fonction génératrice de la stabilisation suivante :

$$\phi = \underbrace{id \circ ... \circ id}_{m-1} \circ \psi_{k-1} \circ ... \circ \underbrace{id \circ ... \circ id}_{m-1} \circ \psi_1 \circ \underbrace{id \circ ... \circ id}_{m-1} \circ \psi_0,$$

où l'on a rajouté à chaque fois $(m-1)$ id entre chaque ψ_j. Alors on sait que le point fixe p de ϕ vérifie (SDM2) pour cette nouvelle fonction génératrice F_m. En effet,en utilisant les hypothèses de k et le lemme d'interpolation, il est facile de montrer que l'on a le même résultat que la propriété 4.2 pour une stabilisation comme décrite précédement. On considère donc cette nouvelle décomposition et pour tout j on peut écrire :

$$\psi_j = \psi_{j,m-1} \circ ... \circ \psi_{j,0} = \underbrace{id \circ ... \circ id}_{m-1} \circ \psi_j,$$

On utilise alors le lemme d'interpolation et l'on obtient une famille $(\beta^t_{j,i})_{t \in [0,1]}$ qui interpole la première écriture avec la deuxième. Grâce au choix de k, on a assuré que tous les hamiltoniens de cette famille restent C^1-proche de l'identité pour tout t. Ainsi, on obtient une famille de fonctions génératrice $F^t_m : (\mathbb{R}^{2d})^{mk}/\mathbb{Z}^{2d} \to \mathbb{R}$ de ϕ, telle que $F^0_m = F_m$ et F^1_m est une fonction génératrice associée à la décomposition (1). On associe à p le chemin $z(t)$ de point critique de F^t_m de la correspondance $Crit(F^t_m) \leftrightarrow Fix(\phi)$. Comme nul$(F^t_m)$ est constant, ind$(F^t_m, z(t))$ est aussi constant. Ainsi, l'homologie locale de F^0_m en $z(0)$ est égale à l'homologie locale de F^1_m en $z(1)$. On a le résultat demandé. □

On démontre maintenant l'existence du changement d'hamiltonien, décrit au début de la section 4.2.1.

Lemme 4.5. *Soit ϕ un hamiltonien du tore $\mathbb{T}^{2d}$ d'hamiltonien H de flot ϕ^t_H, ayant un point fixe contractile p. Alors il existe un hamiltonien $\tilde{H}$ tel que le flot hamiltonien $\phi^t_{\tilde{H}}$ vérifie $\phi^1_{\tilde{H}} = \phi$ et pour tout t, $\phi^t_{\tilde{H}}(p) = p$.*

Démonstration. On note γ, le lacet défini par $\gamma(t) = \phi_H^t(p)$. Par définition, ce lacet est contractile et on considère une isotopie γ_s reliant γ au lacet constant p, telle que $\gamma_0 = p$ et $\gamma_1 = \gamma$.

On note pour $r > 0$ et $z \in \mathbb{T}^{2d}$, $B_r(z)$ la boule de rayon r et de centre z_0. On notera par abus de notation $z' - z$ l'unique plus petit vecteur $v \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $z + v = z'$.

On considère, un famille de fonctions lisse $\rho_{s,t}$ telle que $\rho_{z,t} = 1$ sur la boule $B_{\frac{1}{8}}(\gamma_s(t))$ et $\rho_{s,t} = 0$ en dehors de la boule $B_{\frac{1}{4}}(\gamma_s(t))$. On définit alors une famille lisse d'hamiltoniens $K_{s,t} : \mathbb{T}^{2d} \to \mathbb{R}$ à support dans $B_{\frac{1}{4}}(\gamma_s(t))$ par :

$$K_{s,t}(z) := \rho_{s,t}(z)\langle J\frac{d}{ds}\gamma_s(t), z - \gamma_s(t)\rangle, /\forall z \in B_{\frac{1}{4}}(\gamma_s(t)).$$

Soit alors $\kappa_{s,t}$, la famille de flot hamiltonien associée. On vérifie alors que :

$$\kappa_{s,t}(p) = \kappa_{s,t}(\gamma_s(0)) = \gamma_s(t),$$

De plus, on a que $K_{s,0} = K_{s,1} = 0$ d'où $\kappa_{s,0} = \kappa_{s,1} = id$. On obtient alors le flot hamiltonien $\phi_{\tilde{H}}^t$ demandé en posant :

$$\phi^t := \kappa_{1,t}^{-1} \circ \phi_H^t.$$

□

On considère le k du lemme et la composition initial de ϕ associé à ϕ_t. Alors on déduit la décomposition relative à $\phi_{\tilde{H}}^t$ de la façon suivante :

$$\phi = \tilde{\psi}_{k-1} \circ ... \circ \tilde{\psi}_0,$$

où pour tout j, $\tilde{\psi}_j = \phi_{\tilde{H}}^{\frac{j+1}{k}} \circ (\phi_{\tilde{H}}^{\frac{j}{k}})^{-1} = (\kappa_{1,\frac{j+1}{k}})^{-1} \circ \psi_j \circ \kappa_{1,\frac{j}{k}}$. Or gràce au lemme de raffinement, on peut choisir k assez grand pour que pour tout j e tout $t \in [0,1]$, $\tilde{\psi}_j^t$ soient C^1-prochent de l'identité. Ainsi, par le même raisonnement décrit dans la démonstration du lemme de raffinement, la fonction génératrice $\tilde{F}$ associée à cette décomposition vérifie alors les mêmes propriétes d'homologie locale pour le point p :

$$Loc_*(\tilde{F}, \tilde{z}) \cong Loc_*(F, z),$$

où $\tilde{z}$ est le point critique de associé au point p. Ainsi, le point fixe p vérifie la condition (SDM2) pour cette nouvelle fonction génératrice.

Pour résumer, on peut supposer que notre point fixe p de ϕ vérifie les hypothèses de la remarque 4.1 et est l'isotopie en temps 1 d'un hamiltonien H de flot ϕ_H^t tel que $\phi_H^t(p) = p$.

4.2.2 Etude locale du point fixe p.

On considère toujours un hamiltonien ϕ et un point fixe contractile p vérifiant les hypothèses de la remarque 4.1. On suppose de plus que ϕ est le flot en temps un d'une isotopie hamiltonienne ϕ_H^t telle que pour tout t, $\phi_H^t(p) = p$. On considère alors une fonction génératrice $F : \mathbb{R}^{2dk} \to \mathbb{R}$ associée à une décomposition $\phi = \psi_{k-1} \circ ... \circ \psi_0$ pour un k vérifiant les hypothèses du lemme 4.3. Ainsi, les multiplicateurs de Floquet de ϕ en p sont tous égaux à 1. En combinant avec le lemme suivant, que l'on trouve dans [4], on montre que ϕ peut être considérer aussi C^1-proche de l'identité que l'on veut dans un voisinage de p par un changement de base symplectique.

Lemme 4.6. *Soit $\Phi : v \to V$ une application linéaire symplectique d'un espace vectoriel symplectique (V, w). On suppose que les seuls valeurs propres de Φ sont égales à 1. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, V peut être décomposé comme une somme directe de deux sous espaces lagrangiens L et L' avec $\Phi(L) = L$ tel qu'il existe un symplectomorphisme Ψ de V préservant les espaces L et L' et tel que $\Psi\Phi\Psi^{-1}$ soit C^1-proche de l'identité à ϵ près.*

Démonstration. On fixe $\epsilon > 0$, et on procède par récurrence.

Cas $\dim(V) = 2$. On sait que le spectre de Φ n'est pas vide d'où Φ est trigonalisable sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en conjugant par un symplectomorphisme diagonal on peut rendre $*$ aussi petit que l'on veut et on a le résultat.

Cas $dim(V) = n > 2$. On a deux sous cas possible pour $K := \mathrm{Ker}(\Phi - I)$.

(1) Il existe un sous espace symplectique V_0 inclus dans K,

(2) K est isotrope.

Dans le cas (1), on a une décomposition de V par $V = V_0 \oplus V_0^w$ où V_0^w est l'othogonale par rapport à w de V_0. Et $\Phi|_{V_0} = Id_{V_0}$. De plus Φ préserve la décomposition d'où on applique l'hypothèse de récurrence.

Dans le cas (2), On choisit un complémentaire V_0 de K dans K^w. et un complémentaire N de K^w dans V. On a alors

$$K^w = K \oplus V_0,$$
$$V = N \oplus K^w.$$

On sait déjà que $\Phi|_K = Id_K$, on veut plus de détails sur le comportement de Φ sur N. On peut alors choisir une base symplectique $(e_i, f_i)_{i \in [1,n]}$ telle que $K = Vect(e_1, ..., e_l)$ avec $l = \dim(K)$. Alors $K^w = Vect(e_1, .., e_n, f_1, ...f_{l+1})$ et :

$$V_0 = Vect(e_{l+1}, ..., e_n, f_{l+1}, ..., f_n),$$
$$N = Vect(f_1, ..., f_l)$$

On procède à un petit calcul sur N. Pour tout $j \in [1, l]$, si on écrit $\Phi(f_j) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k + \mu_k f_k$, alors pour tout $i \in [0, l]$ on a :

$$\delta_{ij} = w(f_j, e_i) = w(\Phi(f_j), \Phi(e_i)) = w(\Phi(f_i), e_i) = \mu_i.$$

Ainsi, dans la base $(e_i, f_i)_{i \in [1,n]}$ la matrice de Φ a la forme suivante :

$$\Phi = \begin{pmatrix} I_K & A & B \\ 0 & \Phi_0 & C \\ 0 & 0 & I_N \end{pmatrix}$$

.

Où Φ induit le symplectomorphisme $\Phi_0 : V_0 \to V_0$ tel que toutes ses valeurs propres sont égales à 1. Par hypothèse de récurrence, il existe deux lagrangiens L_0 et L'_0 respectant les propriétés demandées. On pose alors

$$L = K \oplus L_0$$
$$L' = L'_0 \oplus N.$$

On vérifie bien que ce sont deux Lagrangiens vérifiant les propriétés $\Phi(L) = L$ et $V = L \oplus L'$. De plus on a l'existence d'un symplectomorphisme $\Psi_0 : V_0 \to V_0$ tel que $\Psi_0 \Phi_0 \Psi_0^{-1}$ est aussi proche de l'identité que l'on veut. On pose alors le symplectomorphisme linéaire représenté dans la base $(e_i, f_i)_{i \in [1,n]}$ par :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_0 & 0 \\ 0 & 0 & (\Lambda^*)^{-1} \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\Psi \Phi \Psi^{-1} = \begin{pmatrix} I_K & \Lambda A \Psi_0^{-1} & \Lambda B \Lambda^* \\ 0 & \Psi_0 \Phi_0 \Psi_0^{-1} & \Psi_0 C \Lambda^* \\ 0 & 0 & I_N \end{pmatrix}$$

.

Ainsi, en choississant bien Λ on peut faire en sorte que $|\Psi \Phi \Psi^{-1} - id| < \epsilon$ et on obtient le résultat. □

Dans notre cas, $\Phi = d\phi(p)$ et ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un changement de base symplectique θ à valeur dans un voisinage $\mathcal{U}$ de p, envoyant l'origine sur p et tel que $\theta^{-1} \circ \phi \circ \theta$ vérifie $|\theta^{-1} \circ \phi \circ \theta - id|_{C^1} < \epsilon$ un l'ouvert $\mathcal{U}$ contenant 0 de $\mathbb{R}^{2d}$ égale à $\theta^{-1}(\mathcal{U})$.

Ainsi, on peut considérer une fonction génératrice g de ϕ sur le voisinage $\mathcal{U}$ qui contient p et telle que g soit sans variable auxiliaire. D'où $g : \mathcal{U} \to R$ est une fonction génératrice de ϕ sur $\mathcal{U}$. Cependant, la fonction génératrice est définie seulement localement. On peut considérer un hamiltonien $K : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tel que le flot ϕ_K^t est représenté toute fois par la fonction génératrice tg.

On voudrait étendre g en une fonction génératrice G définie sur tout le tore $\mathbb{T}^{2d}$ et il suffirait de montrer alors que p est un SDM pour cette fonction génératrice pour conclure.

On commence par montrer que l'on peut étendre le flot ϕ_k^t. Pour cela on va utiliser le lemme suivant que l'on trouve dans [4] :

Lemme 4.7. *Soit ψ^t, $t \in \mathbb{S}^1$, un lacet de germe de difféomorphismes hamiltonien d'un variété symplectique W fixant un point p de W. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le lacet ψ s'étend en un lacet de difféomorphismes hamiltoniens globales de W,

(ii) Le lacet ψ s'étend en un lacet contractile de difféomorphismes hamiltoniens globales de W, fixant p,

(iii) Le lacet ψ est contractile dans le groupe des germes d'hamiltoniens de p,

(iv) Le nombre de tour que fait ψ est nul, ou encore : $\rho(\psi) = 0$.

Démonstration. L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est claire.
Par contre pour $(i) \Rightarrow (iv)$, pour éviter d'alourdir ce rapport, on renvoie à l'ouvrage de McDuff et Salamon pour la démonstration. ([3],corollaire 10.23).
Pour démontrer $(iv) \Rightarrow (iii)$, il faut remarquer que sur un voisinage d'un point p, ψ^t est homotope à sa différentielle $d\psi^t$. Ainsi, par définition de ρ, on a $\rho(\psi) = \rho(d\psi) = 0$ et donc le lacet est bien contractile dans le groupe de germes d'hamiltoniens de p.
Il ne reste plus qu'à démontrer $(iii) \Rightarrow (ii)$. On va traiter deux cas.
On considère dans un premier temps que ψ^t est C^1-proche de l'identité pour tout t. Alors, dans un voisinage de p, ψ est représenté par une fonction génératrice f C^2-petite. On étend alors cette fonction génératrice à une fonction génératrice $\tilde{f}$ définie sur tout W, et qui est C^2-petite. Ainsi, l'isotopie ψ s'étend à une isotopie $\tilde{\psi}$ qui reste C^1-proche de l'identité et rest donc a fortiori contractile.
Dans le cas général, vu que le lacet ψ^t est contractile localement, on considère une famille d'isotopies locles ψ_s^t, $s \in [0,1]$ telle que $\psi_0 \equiv id$ et pour tout t, $\psi_1^t = \psi^t$. Alors, on considère une partition de $[0,1]$, $0 = s_0 < s_1 < ... < s_k = 1$ telle que les lacets ψ_{s_i} et $\psi_{s_{i+1}}$ soient C^1-prochent pour tout $i \in [0, k-1]$. Et donc, en particulier, ψ_{s_1} est C^1-proche de $\psi_0 = id$ d'où on peut l'étendre en un lacet contractile $\tilde{\psi}_{s_1}$ sur tout W. Si l'on considère maintenant avoir construit une extention contractile $\tilde{\psi}_{s_i}$ de ψ_{s_i} sur W. Alors, le lacet $\eta_i^t = \psi_{s_{i+1}}^t \circ (\psi_{s_i}^t)^{-1}$ reste C^1-proche de l'identité, on peut donc l'étendre en un acet contractile $\tilde{\eta}^t$ sur W. Et donc on peut définir une extention contractile de $\psi_{s_{i+1}}^t$ par $\tilde{\psi}_{s_{i+1}}^t := \tilde{\eta}^t \circ \tilde{\psi}_{s_i}^t$. On obtient alors le résultat souhaité. □

On pose alors $\eta^t := \phi_H^t \circ (\phi_K^t)^{-1}$. On a que η^t est homotope au lacet parcourant en premier $(\phi_K^t)^{-1}$ puis ϕ_H^t. On va alors montrer le lemme suivant

Lemme 4.8. *Avec les hypothèses précédentes, on a :*

$$\rho(\eta) = 0.$$

On montre un lemme intermédiaire avant de faire la preuve du résultat ci-dessus.

Lemme 4.9. *Avec les hypothèses précédentes, l'indice de Maslov moyen de p pour la fonction génératrice g est nul soit :*

$$\overline{\mathrm{mas}}(g, p) = 0.$$

Démonstration. On considère une suite (ϵ_i) de réels positifs, tendant vers 0. Il existe alors un système de coordonnées symplectique θ_i sur le voisinage $\mathcal{U}$ de p tel que $\Phi_i^t := \theta_i^{-1} \circ \phi \circ \theta_i$ vérifie $|\Phi_i^t - id|_{C^1} < \epsilon_i$ sur l'ouvert $\theta_i^{-1}(\mathcal{U})$. Alors, comme l'indice de Maslov est indépendant par changement de coordonées, il suffit de calculer les indices de Maslov moyen des chemins $\Gamma_i : t \to d\Phi_i^t(0)$. Pour tout voisinage $W \subset Sp(2d)$ de l'identité, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un i suffisament grand tel que $d\Phi_i^t(0) \in W$ pour tout $t \in [0, p]$. Donc, l'indice de Maslov de Γ_i^p est borné et à fortiori celui de $d\phi^t(p)$ aussi indépendement de p. Par définition on obtient alors

$$\overline{\mathrm{mas}}(g, p) = 0.$$

□

Par la remarque 2.1, on a alors $\rho(\Gamma) = 0$. On peut procéder à la démonstation du lemme 4.8.

Démonstration. Par la proposition 3.1, l'indice de Maslov de p^n associé au flot $\phi_H^t : [0, n] \to Sp(2d)$ est compris entre $-d$ et d. Et en appliquant le théorème 2.1 sur les inégalités d'itérations, l'indice de Maslov de p associé au flot $\phi_K^t : [0, n] \to Sp(2d)$ est aussi compris entre $-d$ et d. Ainsi, l'indice de Maslov de la composée $\eta^t : [0, s] \to Sp(2d)$ est aussi borné et indépendement de $n \in \mathbb{N}$. Et donc le nombre de tours de $\Gamma^n := (d\eta^t(p) : [0, n] \to Sp(2d))$ est borné et indépendant de $n \in \mathbb{N}$ par la remarque 2.1, soit $\rho(\Gamma^n)$ est borné. Or

$$\rho(\Gamma^n) = n\rho(\Gamma)$$

On en déduit le résultat. □

Grâce au lemme 4.7 et 4.8, on déduit que l'hamiltonien η^t s'étend en un hamiltonien du tore. Or la relation $\phi_k^t = (\eta^t)^{-1} \circ \phi_H^t$ s'étend donc en un hamiltonien $\tilde{K}_t$ du tore tel que $\tilde{K}_t|_{\mathcal{U}} \equiv K_t$. On considère $G : \mathbb{R}^{2dl} \to \mathbb{R}$ une fonction génératrice de $\phi_{\tilde{K}}^1 = \phi$ d'une décomposition de Chaperon $\phi = \mu_{l-1} \circ ... \circ \mu_0$ et le point critique z' de G associé au point fixe p. De plus, on a pour tout j, $\mu_j = \phi_{\tilde{K}}^{\frac{j+1}{l}} \circ (\phi_{\tilde{K}}^{\frac{j}{l}})^{-1}$ et donc sur le voisinage $\mathcal{U}$ de p, on a :

$$\mu_j = \phi_K^{\frac{j+1}{l}} \circ (\phi_K^{\frac{j}{l}})^{-1},$$

Et comme ϕ_K^t est engendré par la fonction génératrice tg, pour tout j et pour tout t, la composition $\mu_j^t \circ \mu_{j-1} \circ ... \circ \mu_0$ est C^1-petite. Ainsi, en utilisant le lemme d'interpolation on a que les deux écritures $\mu_{l-1} \circ ... \circ \mu_0$ et $\underbrace{id \circ ... \circ id}_{l-1} \circ \phi$ sont homotopes et par la proposition 4.2, on a le résultat :

$$Loc_*(G, z') \cong Loc_*(g, p).$$

Dans le même esprit, le lacet η^t étant contracile, on a le résultat suivant :

$$Loc_*(G, z') \cong Loc_*(F, z) \tag{4}$$

Démonstration. On considère une hommotopie η_s^t entre η^t et le lacet identité, il existe une décomposition de l'homotopie :

$$\eta_s^t = \psi_{s,m-1} \circ ... \circ \psi_{s,0},$$

telle que $\psi_{s,j} = \eta_s^{\frac{j+1}{m}} \circ (\eta_s^{\frac{j}{m}})^{-1}$ et pour tout s et tout j entre 0 et $m-1$, $\psi_{s,j}$ soit C^1-petit. On conclt alors par la proposition 4.2. car on obtient une interpolation C^1-petite entre G et une stabilistion de F. □

On en déduit donc que p est associé à un maximum local strict de la fonction génératrice g. On veut maintenant montrer que p est un SDM pour la fonction génératrice G, soit encore que p est un maximum local strict des fonctions génératrices g_j pour tout j entre 0 et $m-1$. Pour cela on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.10. *Pour tout $0 \leqslant s < t \leqslant 1$, on a sur $\mathcal{U}$:*

$$\text{Fix}(\phi_K^t \circ (\phi_K^s)^{-1}) = \{p\}.$$

Démonstration. Sinon, il existe $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ et un point $z_0 = (x_0, y_0)$ tel que $\phi_K^t(x_0, y_0) = \phi_K^s(x_0, y_0)$. Or par définition de ϕ_K^t, on a la relation $\phi_K^t(x_0, y_0) = (x_t, y_t)$ si et seulement si les deux équations sont vérifiées :

$$\begin{cases} x_t - x_0 = t\partial_y g(x_t, y_0) \\ y_t - y_0 = -t\partial_x g(x_t, y_0) \end{cases}$$

Ainsi, on a les relations :

$$\begin{cases} 0 = x_t - x_s = (t-s)\partial_y g(x_t, y_0) \\ 0 = y_t - y_0 = -(t-s)\partial_x g(x_t, y_0) \end{cases}$$

Soit encore

$$(x_t, y_t) = (x_0, y_0) = p$$

Et on obtient le résultat. □

Proposition 4.2. Le point p est un maximum local strict de toutes les fonctions génératrice g_j pour j compris entre 0 et $m-1$.

Démonstration. Pour tout $0 \leqslant s < t \leqslant 1$, on considère une famille lisse $g_{s,t} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de fonctions génératrice de $\phi_K^t \circ (\phi_K^s)^{-1}$ telle que $g_{0,1} = g$. Par le lemme 4.10, on a

$$\mathrm{Crit}(g_{s,t}) = \{p\}.$$

Donc, par un raisonnement analogue de la proposition 3.3 de la première partie, on montre que pour tout $0 \leqslant s < t \leqslant 1$,

$$Loc_*(g_{s,t}, p) \cong Loc_*(g_{0,1}, p).$$

En particulier, p est un maximum local strict pour les fonctions $g_{\frac{j}{m},\frac{j+1}{m}} = g_j$ pour tout j entre 0 et $m-1$. □

On a donc montrer que p est un SDM de ϕ pour la fonction génératrice G. On conclut donc le résultat du théorème 1.1 par le théorème 3.1.

Références

[1] M. Audin. *Morse theory and Floer homology.* Springer.

[2] Kung ching Chang. *Infinite dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems.* Birkhäuser, 1991.

[3] D.McDuff D.Salamon. *Introduction to symplectic topology.* Oxford Science Publication, second edition, 1998.

[4] V. Ginzburg. The conley conjecture. *Annals of Mathematiques, second series, vol. 172, no. 2, 1127–1180*, 2010.

[5] N. Hingston. Subharmonic solutions of hamiltonian equations on tori. *Annals of Mathematiques, second series, vol. 170, no. 2, 529–560*, 2009.

[6] M. Mazzucchelli. Symplectically degenerate maxima via generating functions, 2013.

[7] M. Mazzucchelli. The morse index of chaperon's generating families. *2000 Mathematics Subject Classification. 58E05, 70H05, 34C25*, July 29,2015.