ENS de Lyon | **TD 1** | **23/09/2014**
Géométrie avancée

Rappels de calcul différentiel

Exercice 1. *Un petit calcul pour commencer*
Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $g(x) = f(x^2)$. Calculer les dérivées itérées $g^{(n)}(0)$ en fonction de celles de f.

Exercice 2. *Difféomorphismes*

1. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ un homéomorphisme. Montrer que f et f^{-1} sont C^1 si et seulement si f est C^1 et df est inversible en tout point. On dit alors que f est un *difféomorphisme*.
2. Construire un difféomorphisme de $B(0,1)$ dans $]-1,1[^2$.
3. Construire un difféomorphisme de $B(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. *Différentiabilité des valeurs propres*
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre simple de A. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert Ω de A dans $M_n(\mathbb{C})$ et une application C^∞, $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\phi(B)$ soit une valeur propre de B pour tout B.

Variétés topologiques et différentielles

Exercice 4. *Produits*

1. Soient M et N deux variétés de classe C^k ($k \geq 0$). Montrer que $M \times N$ est aussi une variété de classe C^k.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $D_\alpha = \{(e^{i\theta}, e^{i\alpha\theta}) | \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^2$. Montrer que D_α est une variété topologique si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Exercice 5. *Tores*

1. Montrer que $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est une variété de classe C^∞.
2. Montrer que $\mathbb{T}^n$ est C^∞-difféomorphe à $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ fois}}$.

Exercice 6. *Espaces projectifs*
On note $\mathbb{RP}^n$ l'ensemble des droites linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$. C'est le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation $x \sim y \iff \mathbb{R}.x = \mathbb{R}.y$. On munit $\mathbb{RP}^n$ de la topologie quotient.

1. Montrer que $\mathbb{RP}^n$ est une variété C^∞ de dimension n (on pourra utiliser le fait que la projection $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ restreinte à $\mathbb{S}^n$ est surjective).
2. Montrer que π est lisse.
3. Montrer que $\mathbb{RP}^1$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$.

Exercice 7. *Grassmanniennes*
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \leq n$, on note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension k.

Étant donnée une norme N sur V, la distance de Hausdorff entre deux compacts K, K' de V est $d_H(K, K') = \inf\{\varepsilon | K \subset V_\varepsilon(K') \ \&\ K' \subset V_\varepsilon(K)\}$ où $V_\varepsilon(A) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$. On admettra que c'est une distance sur l'ensemble des compacts de V.

Pour $F, G \in \mathcal{G}_k(V)$, on note $d(F, G) = d_H(F \cap \overline{B}, G \cap \overline{B})$, où $\overline{B}$ est la boule unité fermée de (V, N).

1. Montrer que $(\mathcal{G}_k(V), d)$ est un espace métrique compact.
2. Montrer que cette topologie ne dépend pas de la norme N.
3. On fixe $G \in \mathcal{G}_{n-k}(V)$. Montrer que $U_G = \{F \in \mathcal{G}_k(V) | F \oplus G = V\}$ est un ouvert de $\mathcal{G}_k(V)$.
4. On fixe $F \in \mathcal{G}_k(V)$, et $G \in \mathcal{G}_{n-k}(V)$ un supplémentaire. Pour tout $W \in U_G$, montrer qu'il existe une unique application linéaire $f_W \in \mathcal{L}(F, G)$ dont le graphe dans $F \oplus G$ est W.
5. Montrer que $\mathcal{G}_k(V)$ est une variété C^∞, dont on donnera la dimension.
6. Montrer que $\mathcal{G}_1(V)$ est difféomorphe à $\mathbb{RP}^n$.
7. On fixe un produit scalaire sur V. Montrer que l'application $F \mapsto F^\perp$ donne un difféomorphisme entre $\mathcal{G}_k(V)$ et $\mathcal{G}_{n-k}(V)$.

Exercice 8. *Variétés à bord*
On rappelle qu'une variété à bord de dimension n est un espace topologique M séparé, à base dénombrable, pour lequel il existe un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ où $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ est un ouvert de $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$, et les changements de cartes sont les restrictions de difféomorphismes d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ à H.

1. Soit M une variété à bord de dimension n. Soit $x \in M$. Montrer que s'il existe $\alpha \in A$ tel que $x \in U_\alpha$ et $\varphi_\alpha(x) \in \partial H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$, alors $\varphi_\beta(x) \in \partial H$ pour tout $\beta \in A$ tel que $x \in U_\beta$. On note ∂M l'ensemble de ces points (c'est le bord de M).
2. Montrer que ∂M est une variété de dimension $n - 1$.
3. Le produit de deux variétés à bords est-il une variété à bord ?
4. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert dont le bord est une sous-variété de dimension 1. Est-ce que $\overline{U}$ est une variété à bord ?