**Exercice 1.** *Calculs en coordonnées*
Soit $M$ une variété différentiable, et $(x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées locales sur un ouvert $U \subset M$.

1. Rappeler les définitions de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et $dx_i$, puis de $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$.
2. Soit $\omega$ une $p$-forme différentielle sur $M$. Si $X$ est un champ de vecteurs sur $M$, on rappelle que $X \lrcorner\, \omega$ est la $p-1$-forme définie par :
$$(X \lrcorner\, \omega)_x(v_1, \dots, v_{p-1}) = \omega_x(X(x), v_1, \dots, v_{p-1}).$$
Si $\omega = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$ et $X(x) = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, donner une expression de $X \lrcorner\, \omega$.
3. Si $\omega = \sum_{i=1}^n f_i(x) dx_i$ est une 1-forme différentielle, donner une expression de $X \lrcorner\, \omega$.
4. Si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse, donner l'expression de $X.f$.
5. Si $(y_1, \dots, y_n)$ est un système de coordonnées sur un ouvert $V$ d'une variété $N$. Soit $F : V \to U$ une application lisse. Si $\omega$ est une 1-forme, donner l'expression de $F^*\omega$ en coordonnées.

**Exercice 2.** *Différentielle extérieure d'une* 1*-forme*
Soit $M$ une variété différentiable, et soit $\omega$ est une 1-forme sur $M$. Soient $X$ et $Y$ deux champs de vecteurs sur $M$. Montrer l'égalité :
$$d\omega(X, Y) = X.\omega(Y) - Y.\omega(X) - \omega([X, Y]).$$

**Exercice 3.** *Formule de Cartan*
Soit $M$ une variété différentiable. Soit $X$ un champ de vecteurs, et soit $\omega$ une $p$-forme différentielle sur $M$. On rappelle que la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X\omega$ est la $p$-forme définie par :
$$\mathcal{L}_X(\omega) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t^*\omega$$
où $\varphi_t$ est le flot local de $X$.
Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Cartan :
$$\mathcal{L}_X(\omega) = X \lrcorner\, d\omega + d(X \lrcorner\, \omega).$$

1. Démontrer la formule pour $p = 0$ (i.e. si $\omega$ est une fonction $M \to \mathbb{R}$).
2. Démontrer la formule pour $p = 1$.
3. Montrer que $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X(\beta)$.
4. En déduire la formule de Cartan.

**Exercice 4.** *Théorème de la boule chevelue*
Soit $X$ un champ de vecteurs sur la sphère $\mathbb{S}^n$. On suppose que $X$ est unitaire. On définit la fonction $f : [0\,,1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ par $f(t,x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)X(x)$.

1. Montrer que $f$ est bien définie, et lisse sur la variété à bord $[0\,,1] \times \mathbb{S}^n$.

   On pose $\omega$ la forme volume sur $\mathbb{S}^n$ définie par $\omega_x(v_1, \ldots, v_n) = \det(x, v_1, \ldots, v_n)$. Pour $t \in [0\,,1]$, on pose $f_t = f(t, \cdot)$.

2. Montrer que $\int_{\mathbb{S}^n} f_1^*\omega - \int_{\mathbb{S}^n} f_2^*\omega = \int_{\partial[0\,,1]\times\mathbb{S}^n} f^*\omega$.
3. En déduire que $\int_{\mathbb{S}^n} f_1^*\omega = \int_{\mathbb{S}^n} f_2^*\omega$.
4. Démontrer le théorème de la boule chevelue : si $n$ est pair, tout champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^n$ s'annule.