ENS de Lyon **TD 11** **16/12/2014**
Géométrie avancée

Exercice 1. *Cohomologie du cercle*

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse 1-périodique. À quelle condition f est-elle la dérivée d'une fonction 1-périodique ?
2. Montrer que $H^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ et $H^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$.

Exercice 2. *Cohomologie des sphères*
On considère $\mathbb{S}^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ la sphère de dimension $n \geq 2$. On note U_+ et U_- les deux ouverts $\mathbb{S}^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$ et $\mathbb{S}^n \setminus \{(-1, 0, \dots, 0)\}$.

1. Montrer que toute forme différentielle fermée sur U_+ ou U_- est exacte.
2. Montrer que toute 1-forme fermée $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^n)$ est exacte.
3. Montrer que $H^2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R}$ (*indication : se ramener à des* 1*-formes sur* $U_+ \cap U_-$).
4. Plus généralement, si $k < n$, montrer que $H^k(\mathbb{S}^n) = 0$.
5. Donner un isomorphisme explicite entre $H^n(\mathbb{S}^n)$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Gradient, divergence et rotationnel*
On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert, et soit $\overrightarrow{X}$ un champ de vecteurs sur U.
On rappelle que la fonction $\mathrm{Div}(\overrightarrow{X}) : U \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\mathcal{L}_X(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = \mathrm{Div}(\overrightarrow{X}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{X})$ est défini par :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{X}) \lrcorner (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = d\overrightarrow{X}^\perp$$

où la 1-forme $\overrightarrow{X}^\perp$ vérifie $\overrightarrow{X}^\perp_x(v) = \langle \overrightarrow{X}(x) | \overrightarrow{v} \rangle$ pour tout $(x, \overrightarrow{v}) \in U \times \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\mathrm{Div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{X})) = 0$.
2. Si $\overrightarrow{Y}$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\mathrm{Div}(\overrightarrow{Y}) = \overrightarrow{0}$, montrer qu'il existe un champ de vecteurs $\overrightarrow{X}$ tel que $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{X})$.
3. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse, montrer que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\nabla} f) = \overrightarrow{0}$.
4. Si $\overrightarrow{X}$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{0}$, montrer qu'il existe une fonction lisse f telle que $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{\nabla} f$.
5. Les résultats des questions 2. et 4. restent-ils vrais pour tout ouvert de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4. *Produit avec* $\mathbb{R}$
On suppose que M est une variété de dimension n telle que $M \times \mathbb{R}$ soit difféomorphe à $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Montrer que toute forme différentielle fermée sur M est exacte.
2. Montrer que M ne peut pas être compacte (*indication : on montrera que* M *est orientable*).