ENS de Lyon **TD 12** **17/12/2014**
Géométrie avancée

Exercice 1. *Feuilletages de codimension* 1
Soit M une variété différentiable, et soit ω est une 1-forme sur M telle que $\omega_x \neq 0$ pour tout $x \in M$.

On note $\Delta \subset TM$ la distribution $\ker \omega$, i.e. $\Delta \cap T_xM = \ker(\omega_x)$ pour tout $x \in M$.

1. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) La distribution Δ est totalement intégrable.
   (b) $\omega \wedge d\omega = 0$.
   (c) La restriction de $d\omega$ à Δ est nulle (i.e. si $x \in M$ et $v_1, v_2 \in \ker(\alpha_x)$, alors $d\omega_x(v_1, v_2) = 0$).

   Indication : on pourra utiliser l'égalité $d\omega(X,Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X,Y])$ *où* X *et* Y *sont deux champs de vecteurs sur* M*, ainsi que le théorème de Frobenius.*

   Dans le reste de l'exercice, on suppose que $\omega \wedge d\omega = 0$.
2. Montrer qu'il existe une 1-forme α telle que $d\omega = \omega \wedge \alpha$.
3. Calculer $d\alpha \wedge \omega$. En déduire qu'il existe une 1-forme β telle que $d\alpha = \omega \wedge \beta$.
4. Montrer que $\alpha \wedge d\alpha$ est fermée.

   Le but de cet exercice est de montrer que la classe de cohomologie de De Rham $\mathcal{GV} = [\alpha \wedge d\alpha] \in H^3(M)$ ne dépend que de la distribution $\Delta = \ker \omega$ (on appelle $\mathcal{GV}$ l'invariant de Godbillon-Vey de la distribution Δ).
5. Soit α' une autre 1-forme telle que $d\omega = \omega \wedge \alpha'$. Montrer qu'il existe une fonction g telle que $\alpha' = \alpha + g\omega$, et en déduire que $\alpha \wedge d\alpha - \alpha' \wedge d\alpha'$ est exacte.
6. Soit ω' une autre 1-forme telle que $\ker \omega' = \Delta$. Montrer qu'il existe une fonction f ne s'annulant pas telle que $\omega' = f\omega$.
7. On note $\alpha' = \alpha - d(\mathrm{Log}|f|)$. Montrer que $d\omega' = \omega' \wedge \alpha'$.
8. Conclure.

Exercice 2. *Variétés compactes contractiles*
Une variété fermée orientable peut-elle être contractile ?

Exercice 3. *Cohomologie des tores*
On propose deux façons de calculer les $H^k(\mathbb{T}^n)$.

1. Si $[\omega] \in H^k(\mathbb{T}^n)$, considérer le tiré en arrière $\pi^*\omega$ où $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ est la projection. D'après le lemme de Poincaré, il existe $\alpha \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\pi^*\omega = d\alpha$. À quelle condition la forme α est-elle périodique (i.e. existe-t-il $\beta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{T}^n)$ telle que $\alpha = \pi^*\beta$) ?

2. Si M est une variété différentiable, trouver un isomorphisme entre $H^k(M \times \mathbb{S}^1)$ et $H^k(M) \oplus H^{k-1}(M)$.

Exercice 4. *Les $H^k(M)$ sont de dimension finie*
Soit M une variété différentielle fermée de dimension n. Un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de M est appelé un **bon recouvrement** s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mathfrak{U}$ est fini.
2. Tous les ouverts $U \in \mathfrak{U}$ sont difféomorphes à $\mathbb{R}^n$.
3. Pour tout $U \in \mathfrak{U}$, l'ensemble $\{V \in \mathfrak{U} | U \cap V \neq \emptyset\}$ est fini.
4. Pour tous $U, V \in \mathfrak{U}$ tels que $U \cap V \neq \emptyset$, l'intersection $U \cap V$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

En utilisant l'existence d'un bon recouvrement sur toute variété fermée, et les suites exactes de Mayer-Vietoris, montrer que les espaces $H^k(M)$ sont de dimension finie.