ENS de Lyon **TD 2** **30/09/2014**
Géométrie avancée

Exercice 1. *Tores*

1. Montrer que $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est une variété de classe C^∞.
2. Montrer que $\mathbb{T}^n$ est C^∞-difféomorphe à $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ fois}}$.

Exercice 2. *Espaces projectifs*
On note $\mathbb{RP}^n$ l'ensemble des droites linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$. C'est le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation $x \sim y \iff \mathbb{R}.x = \mathbb{R}.y$. On munit $\mathbb{RP}^n$ de la topologie quotient.

Étant donné $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ la droite $\mathbb{R}.x \in \mathbb{RP}^n$.

1. Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que $U_i = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{RP}^n | x_i \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{RP}^n$. Montrer que U_i est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $\mathbb{RP}^n$ est une variété C^∞ de dimension n.
3. Montrer que π est lisse.
4. Montrer que $\mathbb{RP}^1$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$.

Exercice 3. *Grassmanniennes*
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \leq n$, on note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension k.

Étant donnée une norme N sur V, la distance de Hausdorff entre deux compacts K, K' de V est $d_H(K, K') = \inf\{\varepsilon | K \subset V_\varepsilon(K') \ \& \ K' \subset V_\varepsilon(K)\}$ où $V_\varepsilon(A) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$. On admettra que c'est une distance sur l'ensemble des compacts de V.

Pour $F, G \in \mathcal{G}_k(V)$, on note $d(F, G) = d_H(F \cap \overline{B}, G \cap \overline{B})$, où $\overline{B}$ est la boule unité fermée de (V, N).

1. Montrer que $(\mathcal{G}_k(V), d)$ est un espace métrique compact.
2. Montrer que cette topologie ne dépend pas de la norme N.
3. On fixe $G \in \mathcal{G}_{n-k}(V)$. Montrer que $U_G = \{F \in \mathcal{G}_k(V) | F \oplus G = V\}$ est un ouvert de $\mathcal{G}_k(V)$.
4. On fixe $F \in \mathcal{G}_k(V)$, et $G \in \mathcal{G}_{n-k}(V)$ un supplémentaire. Pour tout $W \in U_G$, montrer qu'il existe une unique application linéaire $f_W \in \mathcal{L}(F, G)$ dont le graphe dans $F \oplus G$ est W.
5. Montrer que $\mathcal{G}_k(V)$ est une variété C^∞, dont on donnera la dimension.
6. Montrer que $\mathcal{G}_1(V)$ est difféomorphe à $\mathbb{RP}^n$.
7. On fixe un produit scalaire sur V. Montrer que l'application $F \mapsto F^\perp$ donne un difféomorphisme entre $\mathcal{G}_k(V)$ et $\mathcal{G}_{n-k}(V)$.

Exercice 4. *Variétés à bord*
On rappelle qu'une variété à bord de dimension n est un espace topologique M séparé, à base dénombrable, pour lequel il existe un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ où $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ est un ouvert de $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$, et les changements de cartes sont les restrictions de difféomorphismes d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ à H.

1. Soit M une variété à bord de dimension n. Soit $x \in M$. Montrer que s'il existe $\alpha \in A$ tel que $x \in U_\alpha$ et $\varphi_\alpha(x) \in \partial H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$, alors $\varphi_\beta(x) \in \partial H$ pour tout $\beta \in A$ tel que $x \in U_\beta$. On note ∂M l'ensemble de ces points (c'est le bord de M).
2. Montrer que ∂M est une variété de dimension $n-1$.
3. Le produit de deux variétés à bords est-il une variété à bord ?
4. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert dont le bord est une sous-variété de dimension 1. Est-ce que $\overline{U}$ est une variété à bord ?

Exercice 5. $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ *difféomorphe à* $\mathbb{RP}^3$
On note $\mathbb{H}$ le corps non commutatif des quaternions. Il s'agit de la $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4, engendrée par $(1, i, j, k)$, satisfaisant les règles $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$, $jk = -kj = i$.
On note $\overline{a + ib + jc + kd} = a - ib - jc - kd$ le conjugué d'un quaternion, et $|q| = \sqrt{\overline{q}q}$ sa norme.

1. Vérifier que $|a + ib + jc + kd| = \|(a, b, c, d)\|_2$, que $|\overline{q}| = |q|$, et que $|qq'| = |q||q'|$.
2. Ainsi, $\mathbb{S}^3 = \{q \in \mathbb{H} | |q| = 1\}$ est muni d'une structure de groupe. Trouver une action isométrique de $\mathbb{S}^3$ sur $\mathbb{H}$ qui est non triviale, mais triviale sur $\mathbb{R}.1$.
3. En déduire un morphisme lisse $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$, et montrer qu'il est à valeurs dans $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.
4. Calculer le noyau de φ.
5. Montrer que φ est surjectif (on peut, par exemple, utiliser le fait que $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ est engendré par les retournements, i.e. les rotations d'angle π).
6. Montrer que φ induit un homéomorphisme entre $\mathbb{RP}^3$ et $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'un difféomorphisme.

Exercice 6. *Involutions*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que $f \circ f = Id$. On pose $Fix(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = x\}$.

1. Supposons $f(0) = 0$. On définit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $h(x) = \frac{1}{2}(x + df_0(f(x)))$. Montrer que h est un difféomorphisme entre voisinages de 0.
2. Montrer que $h \circ f = df_0 \circ h$.
3. En déduire que $Fix(f)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.