ENS de Lyon **TD 3** **07/10/2014**
Géométrie avancée

Exercice 1. *Espace tangent et chemins*
Soit M une variété de classe C^∞.

1. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to M$ de classe C^∞. Posons $p = \gamma(0)$. Montrer que l'application $D(\gamma) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ qui à $f \in C^\infty(M)$ associe $(f \circ \gamma)'(0)$ est une dérivation en p.
2. Soit $p \in M$, et soit $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ un dérivation en p. Montrer qu'il existe un chemin $\gamma : \mathbb{R} \to M$ de classe C^∞ tel que $\gamma(0) = p$ et $v = D(\gamma)$.
3. Soit $p \in M$, et soient $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to M$ deux chemins de classe C^∞ tels que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
   (a) $D(\gamma_1) = D(\gamma_2)$
   (b) Il existe une carte (U, φ) avec $p \in U$ telle que $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$
   (c) Pour toute carte (U, φ) telle que $p \in U$, on a $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$

Exercice 2. *Sous-variétés d'une variété*
Soit M une variété lisse de dimension n. On rappelle qu'une sous-variété $N \subset M$ de dimension k est l'image d'un plongement $f : X \to M$ où X est une variété de dimension k.

1. Montrer que $N \subset M$ est une sous-variété si et seulement si :
   (a) Pour tout $x \in N$, il existe un ouvert $U \subset M$ contenant x et une submersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ telle que $\varphi^{-1}(\{0\}) = N \cap U$
   (b) Pour tout $x \in N$, il existe une carte locale (U, φ) de M autour de x telle que $U \cap N = \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\})$
2. Si $N \subset M$ est une sous-variété, définie comme l'image d'un plongement $f : X \to M$, on définit $T_{f(x)}N = Df_x(T_xX) \subset T_xM$. Expliquer pourquoi cette définition coïncide avec la définition d'espace tangent pour une variété différentiable.
3. Si $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n-k}$ est une submersion et $N = \varphi^{-1}(\{0\})$, montrer que $T_xN = \ker D_x\varphi$.
4. Donner un exemple d'immersion injective qui n'est pas un plongement.

Exercice 3. *Groupes classiques*
Montrer que les groupes suivants sont des sous-variétés de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer l'espace tangent en I_n :

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}$
2. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) | \det(A) = 1\}$
3. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) | {}^tAA = I_n\}$
4. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

Exercice 4. *Application de Gauss*
Soit $H \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface compacte. Pour $x \in H$, on note $\psi(x)$ l'orthogonal de T_xH. Ceci définit une application $\psi : H \to \mathbb{RP}^n$. Montrer que ψ est lisse et surjective.

Exercice 5. *Dérivations et crochet de Lie*
Soit M une variété de classe C^∞. Une dérivation sur M est une application linéaire $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ telle que $D(fg) = fD(g) + D(g)g$ (autrement dit, pour tout $p \in M$, l'application $f \mapsto D(f)(p)$ est une dérivation en p).

1. Montrer que si D_1, D_2 sont des dérivations sur M, alors $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ est aussi une dérivation (que l'on note $[D_1, D_2]$).
2. Établir l'identité de Jacobi : si D_1, D_2, D_3 sont des dérivations, alors :

$$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_2, [D_3, D_1]] + [D_3, [D_1, D_2]] = 0$$

Exercice 6. *Involutions*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que $f \circ f = Id$. On pose $Fix(f) = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = x\}$.

1. Supposons $f(0) = 0$. On définit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $h(x) = \frac{1}{2}(x + df_0(f(x)))$. Montrer que h est un difféomorphisme entre voisinages de 0.
2. Montrer que $h \circ f = df_0 \circ h$.
3. En déduire que $Fix(f)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7. *Rétractions*

1. Soit $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction C^1 telle que $r(x, 0) = (x, 0)$ et dr est de rang 1 partout. Montrer que r est à valeurs dans $\mathbb{R} \times \{0\}$.
2. Soit M une sous-variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$, U un voisinage ouvert de M et $r : U \to U$ une application C^∞ de rang partout égal à k tel que $r(x) = x$ pour tout $x \in M$. Montrer que r est à valeurs dans M.
3. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $r : U \to U$ une application C^∞ telle que $r \circ r = r$. On note M l'image de r. Montrer que r est de rang constant près de M et en déduire que que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8. *Plongements*

1. Montrer que le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ admet un plongement dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (pour $n = 2$, on considère la surface de révolution obtenue en faisant tourner un cercle autour d'une axe. On peut ensuite procéder par récurrence).
2. Montrer que les grassmanniennes $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ (voir TD2) se plongent dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.