ENS de Lyon **TD 4** **14/10/2014**
Géométrie avancée

Exercice 1. *Immersions, plongements et restrictions*

1. Montrer que la restriction d'une immersion à une sous-variété est une immersion.
2. Est-ce vrai pour les submersions ?
3. Soit $f : M \to N$ une immersion injective, où M et N sont des variétés. Montrer que si M est compacte, alors f est un plongement. Donner un contre-exemple lorsque M n'est pas compacte.

Exercice 2. *Plongement de* $\mathbb{RP}^2$ *dans* $\mathbb{R}^4$
Soit $v : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^6$ définie par $v(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xz)$.

1. Montrer que v est une immersion. On pourra vérifier que c'est en fait une immersion sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Est-elle injective ?
2. Montrer que v induit un plongement $V : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^6$.
3. Montrer que l'image de ce plongement est incluse dans $H \cap \mathbb{S}^5$, où H est un hyperplan affine.
4. En déduire l'existence d'un plongement de $\mathbb{RP}^2$ dans $\mathbb{R}^4$.

Remarque : On verra plus tard qu'il n'existe pas de plongement de $\mathbb{RP}^2$ *dans* $\mathbb{R}^3$*, pour des raisons d'orientabilité.*

Exercice 3. *Application de Gauss*
Soit $H \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface compacte. Pour $x \in H$, on note $\psi(x)$ l'orthogonal de T_xH. Ceci définit une application $\psi : H \to \mathbb{RP}^n$. Montrer que ψ est lisse et surjective.

Exercice 4. *Isomorphisme entre* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{SO}^\circ(1,2)$

1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{SO}(1,2)$) est une sous-variété de $M_2(\mathbb{R})$ (resp. $M_3(\mathbb{R})$). Quelles sont leurs dimensions ?
2. On note $\mathrm{SO}^\circ(1,2)$ la composante connexe de I_3 dans $\mathrm{SO}(1,2)$. Montrer que c'est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{SO}(1,2)$.
3. Montrer que l'espace tangent à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en I_2 est $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{h \in M_2(\mathbb{R}) | \mathrm{Tr}(h) = 0\}$.
4. On note $\alpha : \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ l'application définie par $\alpha(A) = (h \mapsto AhA^{-1})$. Montrer que cette application est bien définie, et que c'est un morphisme de groupes.
5. Montrer que $\ker \alpha = \{\pm I_2\}$.
6. Montrer que $h \mapsto \det(h)$ est une forme quadratique sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Calculer sa signature. On note $\mathrm{O}(\det)$ son groupe orthogonal.
7. Montrer que $\alpha(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{O}(\det)$.
8. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I_2\}$ est isomorphe à $\mathrm{SO}^\circ(1,2)$.
9. Munir $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'une structure de variété différentiable (pour laquelle la projection $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est lisse), puis montrer que cet isomorphisme est aussi un difféomorphisme.