Exercice 1. *Pas d'immersion de la sphère dans le plan*
Montrer qu'il n'existe pas d'immersion de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. *Matrices de rang donné*
Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, et soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 < r < n$. On note $V_r \subset M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de rang r.

1. Soit $X \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. On écrit X par blocs :
$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A \in M_r(\mathbb{R})$$
On suppose que $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence :
$$X \in V_r \iff D = CA^{-1}B$$
2. En déduire que V_r est une sous-variété de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ de dimension $np-(n-r)(p-r)$.

Exercice 3. *Extensions de fonctions lisses*
Soit M une variété différentiable de dimension $n \in \mathbb{N}$.

1. Si A et B sont deux fermés disjoints de M, montrer qu'il existe une application $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, nulle sur A, valant 1 sur B, à valeurs dans $[0\,,1]$.
2. Si $U \subset M$ est un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞, montrer que pour tout ouvert $V \subset M$ tel que $\overline{V} \subset U$, il existe une application $g : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, qui coïncide avec f sur V.

Exercice 4. *Mesures admissibles sur les variétés*
Soit M une variété différentiable de dimension $n \in \mathbb{N}$. Une **mesure admissible** sur M est une mesure μ sur les boréliens de M telle que, pour toute carte locale (U,φ) de M, la mesure $\varphi_*\mu$ sur $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, avec pour densité une fonction C^∞ strictement positive.

1. Caractériser les mesures admissibles sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer qu'une mesure admissible existe (on pensera à utiliser des partitions de l'unité).
3. Montrer que l'on peut choisir μ telle que $\mu(M) = 1$.
4. Montrer qu'une mesure admissible est régulière (pour tout borélien $B \subset M$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset B$ et un ouvert $U \supset B$ tels que $\mu(U \setminus K) \leq \varepsilon$).
5. Montrer qu'une mesure admissible charge les ouverts (pour tout ouvert non vide $U \subset M$, on a $\mu(U) > 0$).

Exercice 5. *Plongements et sous-variétés fermées.*
Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un plongement $\Phi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ tel que l'image $\Phi(M)$ est fermée dans $\mathbb{R}^{n+1}$.