Exercice 1. *Fibrés en droites*

1. À quelle condition un fibré en droites est-il trivial ?
2. Montrer que le fibré tangent de $\mathbb{S}^1$ est trivial.

Exercice 2. *Fibré tangent de* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$
Montrer que le fibré tangent de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ est trivial pour tout $n \geq 1$ (indication : pour $x \in \mathbb{S}^n$, on cherchera un isomorphisme entre $T_x\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{n+1}$).

Exercice 3. *Fibré tautologique*
On rappelle que $\mathbb{RP}^n$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. On note $E = \{(D, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} | v \in D\}$, et $\pi : E \to \mathbb{RP}^n$ la projection sur le premier facteur. Montrer que (E, π) est un fibré en droites sur $\mathbb{RP}^n$.
2. Montré que ce fibré n'est pas trivial.
3. Généraliser cette construction aux grassmanniennes $\mathcal{G}_k(V)$.

Exercice 4. *Application tangente*
Si $f : M \to N$ est une application C^k entre variétés différentiables, on note $Tf : TM \to TN$ l'application définie par $Tf(x, v) = Df_x(v)$.

1. Montrer que Tf est de classe C^{k-1}.
2. Si $f : M \to N$ et $g : N \to P$ sont des applications C^k, montrer que $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.

Exercice 5. *Fibré tangent de l'espace projectif*
Si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathbb{P}(V)$ l'espace des droites vectorielles de V. Pour $x \in V \setminus \{0\}$, on note $[x] \in \mathbb{P}(V)$ la droite passant par x.
On note $E = \{([x], p) \in \mathbb{P}(V) \times V^* | p(x) = 0\}$. Montrer que E est un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$, isomorphe à $T\mathbb{P}(V)$.

Exercice 6. *Fibré normal*
On munit $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire. Si $S \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété, on note $NS = \{(x, v) \in S \times \mathbb{R}^n | v \in T_xS^\perp\}$ et $\pi : N \to S$ qui à (x, v) associe x.

1. Montrer que (NS, π) est un fibré vectoriel sur S, de rang $n - \dim(\mathrm{S})$ (appelé fibré normal de S).
2. Montrer que le fibré normal de $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ est trivial.