ENS de Lyon **TD 8** **25/11/2014**
Géométrie avancée

Exercice 1. *Orientabilité*

1. Montrer qu'une variété parallélisable (i.e. dont le fibré tangent est trivial) est orientable.
2. Montrer que le produit de deux variétés orientables est orientable.
3. Montrer que le fibré tangent d'une variété est une variété orientable.

Exercice 2. *Orientabilité des hypersurfaces*

1. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface. Montrer que S est orientable si et seulement si il existe une application lisse $N : S \to \mathbb{R}^n$ telle que $T_x N \oplus \mathbb{R}N(x) = \mathbb{R}^n$ pour tout $x \in S$.
2. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f : U \to \mathbb{R}$ une submersion. Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est orientable.

Exercice 3. *Espaces projectifs*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ l'antipodie (i.e. $f(x) = -x$). Cette application préserve-t-elle l'orientation ?
2. Parmi les espaces projectifs réels $\mathbb{RP}^n$, lesquels sont orientables ?

Exercice 4. *Multiplication d'un champ de vecteurs par une fonction*
Si V est un champ de vecteurs sur une variété M, l'orbite d'un point $x \in M$ est $\mathcal{O}_V(x) = \{\varphi_t(x)\}$ où φ_t est le flot local de V.

1. Soit $V \in \mathfrak{X}(M)$, et soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction strictement positive. Comparer les orbites de V et celles de fV.
2. Soit M une variété de dimension 2, et soient X, Y deux champs de vecteurs qui sont linéairement indépendants en tout point. On veut montrer qu'il existe deux fonctions strictement positives $f, g \in C^\infty(M)$ telles que $[fX, gY] = 0$. On note φ le flot de X et ψ le flot de Y.
   (a) Fixons $p_0 \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage $U \subset M$ de p_0 et une application lisse $x : U \to \mathbb{R}$ telle que $\psi_{x(p)}(p) \in \mathcal{O}_X(p_0)$ pour tout $p \in U$.
   (b) De même, on trouve un ouvert V et une application lisse $y \in V \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi_{y(p)}(p) \in \mathcal{O}_Y(p_0)$ pour tout $p \in V$. Montrer que l'application $p \mapsto (x(p), y(p))$ définit un système de coordonnées sur un voisinage de p.
   (c) Décrire les orbites de X et Y dans ce système de coordonnées, et conclure.
   (d) Quelle EDP vient-on de résoudre ?