ENS de Lyon | **TD 9** | **05/12/2014**

Géométrie avancée

Exercice 1. *Espaces projectifs*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ l'antipodie (i.e. $f(x) = -x$). Cette application préserve-t-elle l'orientation ?
2. Parmi les espaces projectifs réels $\mathbb{RP}^n$, lesquels sont orientables ?

Exercice 2. *Variétés orientables*

Soit M une variété compacte orientable. Montrer qu'une forme volume est toujours fermée, mais n'est jamais exacte (*indication : on utilisera le Théorème de Stokes*).

Exercice 3. *Avec ou sans calculs ?*

1. Soit ω la $n-1$ forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n.$$

   Calculer $d\omega$.

2. Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Que vaut $A^*\omega$?

Exercice 4. *Gradient, divergence et rotationnel*

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit $\overrightarrow{X}$ un champ de vecteurs sur U.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction lisse $\mathrm{Div}(\overrightarrow{X}) : U \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathcal{L}_X(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \mathrm{Div}(\overrightarrow{X}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

   Donner une expression de $\mathrm{Div}(\overrightarrow{X})$.

2. Montrer qu'il existe une unique 1-forme $\overrightarrow{X}^\perp$ vérifiant $\overrightarrow{X}^\perp_x(v) = \langle \overrightarrow{X}(x) | \overrightarrow{v} \rangle$ pour tout $(x, \overrightarrow{v}) \in U \times \mathbb{R}^n$.
3. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs $\overrightarrow{\nabla} f$ tel que $(\overrightarrow{\nabla} f)^\perp = df$.
   Donner une expression de $\overrightarrow{\nabla} f$.

   On suppose désormais $n = 3$.

4. Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{X})$ vérifiant :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{X}) \lrcorner (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = d\overrightarrow{X}^\perp.$$

   Donner une expression de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{X})$.

5. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Déterminer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\nabla} f)$.
6. Déterminer $\mathrm{Div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{X}))$ (on pourra soit faire un calcul, soit utiliser la formule de Cartan $\mathcal{L}_V(\omega) = V \lrcorner d\omega + d(V \lrcorner \omega)$).