Exercice 2.

Supposons que f est C^1 et que df_x est inversible pour tout $x \in U$. Soit $y \in V$, et notons $x = f^{-1}(y)$. Comme f^{-1} est continue, on a $f^{-1}(y+h) \to x$ quand $h \to 0$. Notons $u(h) = f^{-1}(y+h) - x$, et effectuons un développement limité de $f(x + u(h))$:

$$\begin{aligned} f(x+u(h)) &= f(x) + df_x(u(h)) + o(u(h)) \\ y+h &= y + df_x(u(h)) + o(u(h)) \\ h &= df_x(u(h)) + o(u(h)) \end{aligned}$$

Comme df_x est inversible, on peut appliquer $(df_x)^{-1}$. Le fait que $(df_x)^{-1}$ est linéaire et continue implique que $df_x^{-1}(o(u(h))) = o(u(h))$. On trouve :

$$(df_x)^{-1}(h) = u(h) + o(u(h))$$

Si $n = 1$, cela signifie que $(df_x)^{-1}(h) \sim u(h)$, d'où $u(h) - d(f_x)^{-1}(h) = o(h)$, ce qui donne la différentiabilité de f^{-1} en y. Montrons que le même raisonnement fonctionne en dimension plus grande :

Lemme 1. *Si $a(h) = b(h) + o(b(h))$ quand $h \to 0$, alors $b(h) = a(h) + o(a(h))$*

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]0,1[$, et soit $R > 0$ tel que $\|a(h) - b(h)\| \leq \varepsilon \|b(h)\|$ pour tout $\|h\| \leq \varepsilon$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned} \|a(h) - b(h)\| &\leq \varepsilon\|b(h) - a(h)\| + \varepsilon\|a(h)\| \\ (1-\varepsilon)\|a(h) - b(h)\| &\leq \varepsilon\|a(h)\| \\ \|a(h) - b(h)\| &\leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|a(h)\| \end{aligned}$$

Comme $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, on peut choisir $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ aussi petit que l'on veut, ce qui montre que $b(h) = a(h) + o(a(h))$. $\square$

En appliquant ce lemme, on obtient :

$$u(h) - (df_x)^{-1}(h) = o((df_x)^{-1}(h))$$

Comme $(df_x)^{-1}$ est linéaire bijective en dimension finie, on a $o((df_x)^{-1}(h)) = o(h)$. En remplaçant $u(h)$ par sa définition, on obtient :

$$f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y) - (df_x)^{-1}(h) = o(h)$$

Autrement dit, f^{-1} est différentiable en y et $df_y^{-1} = (df_x)^{-1}$. Comme l'application $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ définie sur $GL(\mathbb{R}^n)$ est continue, on en déduit que f^{-1} est C^1.