ENS de Lyon **TD 2** **30/09/2014**
Géométrie avancée

Exercice 1. *Tores*

1. Montrer que $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est une variété de classe C^∞.

   Fixons une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$. On appelle $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ la projection. Remarquons que π est ouverte : si $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, alors $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x\in\mathbb{Z}^n} x+U$ est ouvert, donc $\pi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{T}^n$ par définition de la topologie quotient (cet argument fonctionne dans le cadre plus général du quotient par une action de groupe).

   Montrons que $\mathbb{T}^n$ est séparé. Soient $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{T}^n$ tels que $\overline{x} \neq \overline{y}$. Fixons $x \in \pi^{-1}(\{\overline{x}\})$ et $y \in \pi^{-1}(\{\overline{y}\})$. Posons $r = d(x-y, \mathbb{Z}^n)$. Comme $\mathbb{Z}^n$ est fermé et $x - y \notin \mathbb{Z}^n$ (car $\overline{x} \neq \overline{y}$), on a $r > 0$. Posons alors $U = \pi(B(x, \frac{r}{3}))$ et $V = \pi(B(y, \frac{r}{3}))$. Ce sont des ouverts de $\mathbb{T}^n$ (car π est ouverte), de plus $\overline{x} \in U$ et $\overline{y} \in V$. Si $\overline{z} \in U \cap V$, alors $\overline{z}$ possède un relèvement $z \in \pi^{-1}(\{\overline{z}\}) \cap B(x, \frac{r}{3})$, ainsi qu'un relèvement dans $B(y, \frac{r}{3})$, qui est de la forme $z+\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. On a ainsi $r \leq d(x-y, \alpha) \leq d(x, z) + d(z+\alpha, y) < \frac{2r}{3}$, ce qui est absurde. Un tel $\overline{z}$ ne peut donc pas exister, autrement dit $U \cap V = \emptyset$ et $\mathbb{T}^n$ est séparé.

   Pour $x \in \mathbb{R}^n$, posons $V_x = x +]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^n$, $U_x = \pi(V_x)$ et $\psi_x : V_x \to U_x$ la restriction de π. Par définition de U_x, cette application est surjective. Elle est aussi injective, car si $y \in V_x$ alors $(y + \mathbb{Z}^n) \cap V_x = \{y\}$. Elle est continue car c'est la restriction de π qui est continue. Posons $\varphi_x = \psi_x^{-1}$ sa bijection réciproque. Elle est continue : si $W \subset V_x$ est un ouvert, alors $\varphi_x^{-1}(W) = \pi(W)$ est un ouvert de $\mathbb{T}^n$ (car π est ouverte), donc de U_x. Ainsi φ_x est un homéomorphisme.
   Pour $x, x' \in \mathbb{R}^n$, on a $\varphi_x(U_x \cap U_{x'}) = (x +]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^n) \cap (x' +]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^n + \mathbb{Z}^n)$ et $\varphi_{x'}(U_x \cap U_{x'}) = (x' +]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^n) \cap (x +]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^n + \mathbb{Z}^n)$. On trouve alors que $\varphi_{x'} \circ \varphi_x^{-1}(y) = y + x' - x$, ainsi $\varphi_{x'} \circ \varphi_x^{-1}$ est de classe C^∞.
   Comme $\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} U_x = \mathbb{T}^n$, l'ensemble des (U_x, φ_x) pour $x \in \mathbb{R}^n$ est bien un atlas différentiable pour $\mathbb{T}^n$. Cependant, on peut remarquer que $\bigcup_{x\in\mathbb{Q}^n} U_x = \mathbb{T}^n$ (par densité de $\mathbb{Q}^n$ dans $\mathbb{R}^n$), ce qui montre que l'on peut trouver un atlas dénombrable, donc que $\mathbb{T}^n$ est séparable. Ainsi $\mathbb{T}^n$ est bien une variété lisse.

2. Montrer que $\mathbb{T}^n$ est C^∞-difféomorphe à $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ fois}}$.

   Posons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = (e^{2i\pi x_1}, \ldots, e^{2i\pi x_n})$. Cette application est bien définie et continue, et constante sur les classes d'équivalence de la relation $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n$, ce qui définit une application continue $\overline{f} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ telle que $\overline{f} \circ \pi = f$. Montrons que $\overline{f}$ est un C^∞-difféomorphisme. Tout d'abord, l'application $\overline{f}$ est injective car $f(x) = f(y) \iff \pi(x) = \pi(y)$, et

surjective car l'exponentielle complexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1$ est surjective.
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Notons (U_x, φ_x) la carte autour de $\overline{x} = \pi(x)$ définie précédemment. Notons $W = \{(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) | \forall j \ \theta_j \in]2\pi x_j - \frac{\pi}{2}, 2\pi x_j + \frac{\pi}{2}[\}$, c'est un ouvert de $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ contenant $\overline{f}(\overline{x})$. L'application $\psi : W \to \mathbb{R}^n$ définie par $\psi(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) = (\tan(\theta_1 - 2\pi x_1), \dots, \tan(\theta_n - 2\pi x_n))$ donne une carte (W, ψ) de $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ autour de $\overline{f}(\overline{x})$. Dans cette carte, on a $\psi \circ \overline{f} \circ \varphi_x^{-1}(u_1, \dots, u_n) = (\tan(2\pi(u_1 - x_1)), \dots, \tan(2\pi(u_n - x_n))$, qui est bien de classe C^∞. Dans ces mêmes cartes, on trouve $\varphi_x \circ \overline{f}^{-1} \circ \psi^{-1}(v_1, \dots, v_n) = (x_1 + \frac{\arctan v_1}{2\pi}, \dots, x_1 + \frac{\arctan v_1}{2\pi})$ qui est aussi de classe C^∞.
Nous avons montré que $\overline{f}$ et $\overline{f}^{-1}$ sont de classe C^∞, donc $\overline{f}$ est un C^∞-difféomorphisme.

Exercice 2. *Espaces projectifs*
On note $\mathbb{RP}^n$ l'ensemble des droites linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$. C'est le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation $x \sim y \iff \mathbb{R}.x = \mathbb{R}.y$. On munit $\mathbb{RP}^n$ de la topologie quotient.

Étant donné $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ la droite $\mathbb{R}.x \in \mathbb{RP}^n$.

1. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que $U_i = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{RP}^n | x_i \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{RP}^n$. Montrer que U_i est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

   Posons $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ la projection. Comme $\pi^{-1}(U_i) = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on en déduit que U_i est un ouvert de $\mathbb{RP}^n$.
   Définissons $\Psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par $\Psi_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_i, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$, et $\psi_i = \Psi_i \circ \pi$. Comme Ψ_i et π sont continues, l'application ψ_i est continue, et à valeurs dans U_i par définition de U_i. De plus, ψ_i est injective : si $\psi_i(x) = \psi_i(y)$, alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\Psi_i(x) = \Psi_i(y)$. En projetant sur la (i+1)$^{\text{e}}$ coordonnée, on trouve $\lambda = 1$, donc $x = y$. Si $(x_0 : \cdots : x_n) \in U_i$, alors $\psi_i(\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) = (x_0 : \cdots : x_n)$, ce qui montre que ψ_i est surjective. De plus, $\psi_i^{-1} \circ \pi : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$ est continue, donc ψ_i^{-1} est continue par propriété de la topologie quotient.
   On a bien montré que $\psi_i : \mathbb{R}^n \to U_i$ est un homéomorphisme.

2. Montrer que $\mathbb{RP}^n$ est une variété C^∞ de dimension n.

   La question précédente permet de trouver un atlas : on remarque que $\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{RP}^n$.
   L'ensemble des (U_i, ψ_i^{-1}) est un atlas différentiable : l'application $\psi_i^{-1} \circ \psi_j$ est donnée par $\psi_i^{-1} \circ \psi_j(x_1, \dots, x_n) = (\frac{x_1}{x_{i+1}}, \dots, \frac{x_j}{x_{i+1}}, \frac{1}{x_{i+1}}, \frac{x_{j+1}}{x_{i+1}}, \dots, \frac{x_i}{x_{i+1}}, \frac{x_{i+2}}{x_{i+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{i+1}}$ si $i > j$ (et une formule similaire si $i < j$). Ceci montrer que les changements de cartes sont des fractions rationnelles, donc de classe C^∞.
   Comme cet atlas est fini, $\mathbb{RP}^n$ est à base dénombrable.
   Enfin, il reste à montrer que $\mathbb{RP}^n$ est séparé. Soient $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{RP}^n$ tels que $\overline{x} \neq \overline{y}$. Considérons des relevés sur la sphère : choisissons $x \in \pi^{-1}(\{\overline{x}\}) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ et $y \in \pi^{-1}(\{\overline{y}\}) \cap \mathbb{S}^{n-1}$. Fixons $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que les boules $B(x, \varepsilon)$, $B(-x, \varepsilon)$, $B(y, \varepsilon)$ et $B(-y, \varepsilon)$ soient deux à deux disjointes. Posons $U = \pi(B(x, \varepsilon))$

et $V = \pi(B(y,\varepsilon))$, ainsi $\overline{x} \in U$ et $\overline{y} \in V$. Comme $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda\neq 0} B(\lambda x, |\lambda|\varepsilon)$, on voit que U est ouvert, et il en est de même pour V (on aurait pu remarquer dès le début que π est ouverte). Si $\overline{z} \in U \cap V$, alors un relèvement $z \in \pi^{-1}(\{\overline{z}\}) \cap \mathbb{S}^{n-1}$ vérifie $z \in B(x,\varepsilon)$ ou $z \in B(-x,\varepsilon)$. Quitte à changer z par $-z$, on peut choisir $z \in B(x,\varepsilon)$. Mais comme $\overline{z} \in V$, on a $z \in B(y,\varepsilon)$ ou $z \in B(-y,\varepsilon)$, ce qui est impossible car ces boules sont disjointes de $B(x,\varepsilon)$. Ainsi, $U \cap V = \emptyset$, et $\mathbb{RP}^n$ est séparé.

3. Montrer que π est lisse.

   Comme π est définie sur un ouvert d'un espace vectoriel, il suffit de prendre une carte à l'arrivée, autrement dit de montrer que $\psi_i^{-1} \circ \pi$ est lisse dès lors qu'elle est bien définie, ce qui est vrai car cette application est rationnelle.

4. Montrer que $\mathbb{RP}^1$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$.

   En considérant $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$, on pose l'application $\Phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par $\Phi(z) = z^2$. On peut vérifier que $\varphi = \pi \circ \Phi$ est un difféomorphisme entre $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{RP}^1$.

   On peut procéder autrement. On considère $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$ (un voisinage de ∞ est le complémentaire d'un compact de $\mathbb{R}$ auquel on rajoute le point ∞). On peut le munir d'une structure de variété à l'aide de l'atlas $\{(\mathbb{R}, Id), (\{\infty\} \cup \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{1}{x})\}$ (avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$). Ceci donne une structure de variété C^∞ à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
   Pour montrer que $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$, il suffit d'envoyer un point $N \in \mathbb{S}^1$ sur ∞ et $\mathbb{S}^1 \setminus \{N\}$ sur $\mathbb{R}$ via la projection stéréographique de pôle N.
   Pour montrer que $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est difféomorphe à $\mathbb{RP}^1$, on envoie $\mathbb{R}$ sur l'ouvert U_1 défini précédemment, et on remarque que $\mathbb{RP}^1 \setminus U_1$ est un singleton, que l'on identifie à ∞.