Méthodes variationnelles pour l'étude des orbites périodiques · Marco Mazzucchelli

EXAMEN FINAL – 20 mars 2014

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (On ne demande pas de justification).

(a) Si le premier groupe d'homologie $H_1(X;\mathbb{Z})$ est trivial, l'espace topologique X est simplement connexe.

(b) Si M est une variété fermée (i.e. compacte sans bord), $F: M \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse, et $a < b$ sont des nombres réels tels que $H_*(\{F < b\}, \{F < a\}; \mathbb{Q})$ est trivial, alors F n'a pas de valeurs critiques dans l'interval $[a, b)$.

(c) Soient M une variété hilbertienne complète, $F: M \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse (i.e. tout point critique de F est non-dégénéré) satisfaisant la condition de Palais-Smale, d un entier positif, et $a < b$ deux valeurs régulières de F telles que

$$\begin{aligned} H_{d-1}(\{F < b\}, \{F < a\}; \mathbb{Q}) &\cong 0, \\ H_d(\{F < b\}, \{F < a\}; \mathbb{Q}) &\cong \mathbb{Q}^r, \\ H_{d+1}(\{F < b\}, \{F < a\}; \mathbb{Q}) &\cong 0. \end{aligned}$$

Entre les points critiques de F, il y en a exactement r qui ont une valeur critique dans $[a, b)$ et un indice de Morse égal à d.

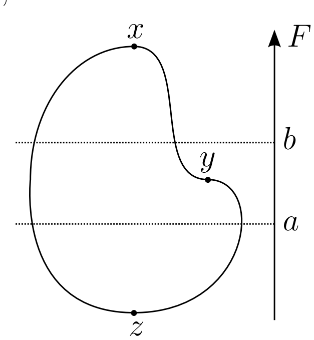
(d) Si M est une variété hilbertienne telle que $H_d(M; \mathbb{Q})$ est non-null pour un certain $d > 0$, chaque fonction lisse $F: M \to \mathbb{R}$ satisfaisant la condition de Palais-Smale possède un point critique.

(e) Si γ est une géodésique fermée dans une variété riemannienne, l'indice de Morse de γ est inférieur ou égal à l'indice de Morse de ses itérées γ^m pour tout m.

Solution.

(a) Faux. En general $H_1(X;\mathbb{Z}) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$, et donc chaque espace topologique avec groupe fundamental parfait et non-trivial nous donne un contrexemple.

(b) Faux. Un contrexemple simple avec M variété ouverte est donné par $M = \mathbb{R}$, $F(x) = x^3$, $b = 1$ et $a = -1$. Si on veut un contrexemple simple avec M fermée, il suffit de "compactifier" l'exemple precedent : on prend $M = S^1$ et une fonction $F: S^1 \to \mathbb{R}$ avec trois points critiques x, y, et z comme dans le dessin suivant :



(c) Faux. Pour $r = 0$ et $d = 1$ on peut réutiliser le contrexemple du point precedent. On peut également trouver des contrexemples avec d et r quelconques.

(d) Faux. On peut prendre $M = S^1 \times \mathbb{R}$ et $F(\theta, t) = t$. Par contre l'affirmation devient vrai si on suppose en plus que M est complète et F est bornée inférieurement (dans ce cas on aurait $H_*(M) \cong H_*(M, \{F < a\})$, où $a < \inf F$).

(e) Vrai. Soit $V \subset \mathrm{T}_\gamma \Lambda M$ un sous-espace vectoriel de dimension $\mathrm{ind}(\gamma)$ tel que $\mathrm{d}^2 E(\gamma)$ est définit négatif dans V. Alors

$$\mathrm{d}^2 E(\gamma^m)[\xi^m, \xi^m] = m^2 \mathrm{d}^2 E(\gamma)[\xi, \xi], \qquad \forall \xi \in V.$$

Donc $\mathrm{d}^2 E(\gamma^m)$ est définit négatif dans $\mathrm{d}\psi^m(\gamma)V$, où $\psi^m : \Lambda M \hookrightarrow \Lambda M$ est la map d'iteration $\psi^m(\zeta) = \zeta^m$. ∎

Exercice 2. Soient M une variété hilbertienne complète et connexe, $F : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse satisfaisant la condition de Palais-Smale, et $b \in \mathbb{R}$ une valeur telle que le sous-niveau $\{F < b\}$ possède deux composants connexes. Prouver que F possède une valeur critique supérieure ou égale à b.

Solution. Soient C_0 et C_1 les deux composantes connexes du sous-niveau $\{F < b\}$, et $\mathscr{F}$ la famille de chemins $\Gamma : [0, 1] \to M$ tels que $F(0) \in C_0$ et $F(1) \in C_1$. Evidemment, la famille $\mathscr{F}$ est non-vide (car M est connexe) et préservée par le flot de $-\nabla F$. La valeur

$$c := \inf_{\Gamma \in \mathscr{F}} \max_{t \in [0,1]} F(\Gamma(t))$$

est contenu dans $[b, \infty)$, et par le théorème de min-max elle est une valeur critique de F. ∎

Exercice 3. Soit $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la fonction

$$F(x, y, w, z) = (y^2 - x^4)(y^2 - 2x^4) - w^2 + z^2.$$

Trouver les points critiques de F et calculer leur indice de Morse, nullité, et homologie locale.

Solution. On vérifie facilement que l'origine est le seule point critique de F avec nullité 2 et indice de Morse 1. Soit $F_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction $F_0(x, y) = (y^2 - x^4)(y^2 - 2x^4)$. Le lemme de Gromoll-Meyer implique que

$$L_j(F, 0) \cong L_{j-1}(F_0, 0).$$

Le sous-niveau $\{F_0 < 0\}$ possède précisément quatre composantes connexes contractiles, et l'union $\{F_0 < 0\} \cup \{0\}$ est contractile. Donc

$$H_j(\{F_0 < 0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}^4 & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j \neq 0, \end{cases}$$

$$H_j(\{F_0 < 0\} \cup \{0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j \neq 0. \end{cases}$$

On considère la suite exacte longue de la couple $\{F_0 < 0\} \subset \{F_0 < 0\} \cup \{0\}$

$$... \longrightarrow H_j(\{F_0 < 0\} \cup \{0\}) \longrightarrow L_j(F_0, 0) \longrightarrow H_{j-1}(\{F_0 < 0\}) \longrightarrow H_{j-1}(\{F_0 < 0\} \cup \{0\}) \longrightarrow ...$$

qui devient

$$... \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow L_2(F_0, 0) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow L_1(F_0, 0) \longrightarrow \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow L_0(F_0, 0) \longrightarrow 0.$$

Vu que l'homomorphisme $H_0(\{F_0 < 0\}) \to H_0(\{F_0 < 0\} \cup \{0\})$ est surjective, la suite exacte longue implique que $L_j(F_0, 0)$ est trivial en tout degré $j \neq 1$, et $L_1(F_0, 0) \cong \mathbb{Q}^3$. Donc on conclut

$$L_j(F, 0) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}^3 & \text{si } j = 2, \\ 0 & \text{si } j \neq 2. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Exercice 4. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 ayant un point critique isolé à l'origine. Supposons que l'homologie locale $L_i(F, 0) := H_i(\{F < F(0)\} \cup \{0\}, \{F < F(0)\}; \mathbb{Q})$ soit non-triviale pour $i = \text{ind}(F, 0)$. Calculer l'homologie locale $L_j(F, 0)$ pour $j \neq i$.

Solution. Par le lemme de Morse-Gromoll-Meyer, on peut supposer que dans un voisinage de l'origine la fonction F a la forme

$$F(y, z) = \tfrac{1}{2}\langle Ay, y\rangle + F_0(z),$$

où A est une matrice $m \times m$ symétrique et inversible, et $m = n - \text{nul}(F, 0)$. Le lemme de Gromoll-Meyer nous donne un isomorphisme

$$L_j(F, 0) \cong L_{j-i}(F_0, 0), \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{0.1}$$

En particulier $L_0(F_0, 0) \cong L_i(F, 0)$ est non-trivial. Ceci implique que l'origine est un minimum local de F_0, et vu qu'il est un point critique isolé il doit être un minimum strict. Donc $L_0(F_0, 0) \cong \mathbb{Q}$, et $L_j(F_0, 0)$ est trivial pour tout $j \neq 0$. Avec (0.1), on conclut

$$L_j(F, 0) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Exercice 5 ($\star$)**.** Soit A une matrice $n \times n$ symétrique inversible, et $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée :

$$Q(v) = \langle Av, v\rangle.$$

Soit M une variété fermée (i.e. compacte sans bord), et $B : M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lisse telle qu'on ait la borne uniforme

$$|B| + |\partial_v B| < \text{const.}$$

Soit $F : M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction

$$F(x, v) = B(x, v) + Q(v).$$

(a) Prouver que F satisfait la condition de Palais-Smale.
(b) Soit $F_0 : M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction $F_0(x, v) = Q(v)$. Montrer que, si $b > 0$ est suffisamment grand, le gradient ∇F_0 est transverse à l'hypersurface $F^{-1}(b)$.
(c) Prouver que les sous-niveaux $\{F_0 < 1\}$ et $\{F < b\}$ sont homotopiquement equivalents.
(d) En supposant que F soit une fonction de Morse, trouver une borne inférieure pour le nombre de points critiques en fonction de la topologie de M.

Solution.
(a) On fixe une métrique riemannienne g sur M, et la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et on prouve qu'on a Palais-Smale par rapport à la métrique produit. Pour ça, il suffit de montrer que la norme riemannienne du gradient de F est bornée inférieurement par une constante positive en dehors d'un compact. Vu que A est inversible, il existe $R > 0$ tel que $|Av| >$ const pour tout $|v| \geq R$, où const est la constante donnée dans l'exercise. Alors, en dehors du compact $\{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \bigm| |v| \leq R\}$ on a

$$|\nabla F| \geq |\partial_v F| = |2Av + \partial_v B| \geq 2|Av| - |\partial_v B| \geq 2\,\text{const} - \text{const} = \text{const}.$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(x, v)\nabla F_0(x, v) &= |2Av|^2 + 2\langle Av, \partial_v B(x, y)\rangle \\ &\geq 4|Av|^2 - 2|Av| \cdot |\partial_v B(x, y)| \\ &\geq 2|Av|(2|Av| - \text{const}). \end{aligned}$$

Il suffit de fixer la constante $b > 0$ suffisamment grande tel que $|F(x, v)| = b$ implique $2|Av| > 2\,\text{const}$.

(c) Si nécessaire, on remplace $b > 0$ par une constante plus grande tel que

$$b > 1 + \text{const}.$$

Si $F_0(x, y) < 1$, on a

$$F(x, v) = F_0(x, v) + B(x, v) < 1 + \text{const} < b,$$

si $F(x, y) < -b$, on a

$$F_0(x, v) = F(x, v) - B(x, v) < -b + \text{const} < -1,$$

et si $F_0(x, y) < -c := -b - \text{const}$, on a

$$F(x, v) = F_0(x, v) + B(x, v) < -c + \text{const} = -b.$$

Donc on a l'inclusion

$$\iota : (\{F_0 < 1\}, \{F_0 < -c\}) \hookrightarrow (\{F < b\}, \{F < -b\}).$$

Soit ϕ_t le flot de $-\nabla F_0$. La preuve du point precedent implique que, si $F(x,v)=b$, alors $F\circ\phi_t(x,v)<b$ pour tout $t>0$. Analogiquement, si $F(x,v)=-b$ on a $F\circ\phi_t(x,v)<-b$ pour tout $t>0$. En particulier le flot se restraint à une application de la forme

$$\phi_t:(\{F<b\},\{F<-b\})\to(\{F<b\},\{F<-b\}),\qquad(t>0).$$

Vu que la seule valeur critique de F_0 est 0 et que $\{F<-b\}\subset\{F_0<-1\}$, pour $T>0$ suffisamment grand on a

$$\phi_T(\{F<b\})\subset\{F_0<1\},\qquad\phi_T(\{F<-b\})\subset\{F_0<-c\}.$$

Ceci prouve que ι est une equivalence d'homotopie avec inverse ϕ_T. Pour terminer, observons que l'inclusion

$$(\{F_0<1\},\{F_0<-c\})\hookrightarrow(\{F_0<1\},\{F_0<-1\})$$

est une equivalence d'homotopie.

(d) On remarque que

$$(\{F_0<1\},\{F_0<-1\})=(M\times\{Q<1\},M\times\{Q<-1\}).$$

Par l'isomorphisme de Künneth, on a

$$H_j(M\times\{Q<1\},M\times\{Q<-1\})\cong\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}H_{j-k}(M)\otimes H_k(\{Q<1\},\{Q<-1\}).$$

Si i est l'indice de Morse de la forme quadratique Q, la couple $(\{Q<1\},\{Q<-1\})$ est homotopiquement equivalent à $(B^i,\partial B^i)$, et donc son homologie est isomorphe à $\mathbb{Q}$ en degré i, et triviale dans les autres degrés. Si $b>0$ est la constant du point precedent, on a

$$H_j(\{F<b\},\{F<-b\})\cong H_j(\{F_0<1\},\{F_0<-1\})\cong H_{j-i}(M).$$

Dans la preuve du point (a) on a montré que les valeurs critiques de F sont compris dans $[-b,b]$. Par l'inégalité de Morse on a

$$\#\mathrm{crit}(F)\geq\mathrm{rang}H_*(\{F<b\},\{F<-b\})=\mathrm{rang}H_*(M).\qquad\blacksquare$$

Exercice 6 ($\star\star$)**.** Soit (M,g) une variété riemannienne fermée. Une géodésique fermée est dite hyperbolique si la fonction de Bott $z\mapsto\mathrm{ind}_z(\gamma)$ est constante, $\mathrm{nul}_z(\gamma)=0$ pour tout $z\in S^1\setminus\{1\}$, et $\mathrm{nul}_1(\gamma)=1$. Dans cet exercice guidé on va prouver un cas particulier d'un théorème de Ballmann, Thorbergsson, et Ziller.

> *Supposons que toute géodésique fermée de (M,g) soit hyperbolique, et qu'il existe un élément non-trivial $h\in\pi_1(M,q_0)$ tel que $h^{k_1}=h^{k_2}$ pour certains $k_1,k_2\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ avec $k_1<k_2$. Alors M possède une infinité de géodésiques fermées, et leur croissance est au moins linéaire.*

Procéder de la façon suivante. Les points sont indépendants, donc on peut résoudre un point sans avoir résolu les precedents.

(a) On appelle $\Lambda_k \subset \Lambda M$ la composante connexe des lacets homotopes aux représentants de la classe d'homotopie $h^k \in \pi_1(M, q_0)$. Soit $\alpha \in \Lambda M$ le minimum de la fonction énergie E dans Λ_1. Prouver que tout orbite critique $S^1 \cdot \alpha^m$ est un minimum local strict de la fonction énergie E.
(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, les courbes itérées α^{mk_1} et α^{mk_2} appartiennent à la même composante connexe $\Lambda_{mk_1} = \Lambda_{mk_2}$. En faisant un min-max avec la famille des chemins qui joint α^{mk_1} et α^{mk_2} on trouve une troisième orbite critique $S^1 \cdot \gamma_m$ de la fonction énergie dans Λ_{mk_1}. Montrer que l'indice de Morse de γ_m est égal à 1.
(c) Montrer que γ_m n'est pas une géodésique fermée itérée.
(d) Montrer que la suite $\{\gamma_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ contient une infinité de géodésiques fermées géométriquement distinctes.
(e) On rappelle que la croissance des géodésiques fermées est une fonction

$$\mathrm{cr} : [0, \infty) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

telle que $\mathrm{cr}(l)$ est le nombre de géodésiques fermées de (M, g) géométriquement distinctes ayant une longueur plus petite ou égale à l. Prouver que la croissance est au moins linéaire, i.e.

$$\liminf_{l \to \infty} \frac{\mathrm{cr}(l)}{l} > 0.$$

Solution.
(a) Par le lemme de Bott, chaque géodésique fermée γ de (M, g) satisfait

$$\mathrm{ind}(\gamma^m) = m \, \mathrm{ind}(\gamma), \quad \mathrm{nul}(\gamma^m) = \mathrm{nul}(\gamma) = 1, \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

En particulier $\mathrm{ind}(\alpha^m) = 0$ et $\mathrm{nul}(\alpha_m) = 1$, donc l'orbite critique $S^1 \cdot \alpha_m$ est un minimum de E non-dégénéré dans les directions transverses à l'orbite, et en particulier un minimum strict.
(b) Soit $\mathscr{F}$ la famille des chemins continus $\Gamma : [0, 1] \to \Lambda M$ tels que $\Gamma(0) = \alpha^{mk_1}$ et $\Gamma(1) = \alpha^{mk_2}$. Le min-max

$$c := \inf_{\Gamma \in \mathscr{F}} \max_{s \in [0,1]} E(\Gamma(s))$$

est une valeur critique de E. Vu que $S^1 \cdot \alpha^{mk_1}$ et $S^1 \cdot \alpha^{mk_2}$ sont minima stricts de E, on a $c > E(\alpha^{mk_2}) = (mk_2)^2 E(\alpha)$. Soit $\Gamma \in \mathscr{F}$ un chemin qui realise le min-max. Donc Γ est de la forme $\Gamma : [0, 1] \to \{E \le c\}$. Soit ϕ_t le flot de $-\nabla E$. En remplaçant Γ par $\phi_t \circ \Gamma$ pour $t > 0$ quelconque, on peut supposer que $E(\Gamma(s)) = c$ si et seulement si $\Gamma(s) \in \mathrm{crit}(E)$.

Si $\Gamma(s) \in \mathrm{crit}(E)$ et $E(\Gamma(s)) = c$, alors $\mathrm{ind}(\Gamma(s)) \ge 1$. Sinon, si $\mathrm{ind}(\Gamma(s)) = 0$, par l'observation du point precedent $S^1 \cdot \Gamma(s)$ est un minimum strict de E, et il existe $s' \neq s$ tel que $E(\Gamma(s')) > E(\Gamma(s)) = c$, ce qui contredit le fait que Γ est un chemin qui réalise le min-max c.

Supposons que $\zeta := \Gamma(s) \in \mathrm{crit}(E) \cap E^{-1}(c)$ et $\mathrm{ind}(\zeta) \geq 2$. Alors il existe un voisinage $U \subset \Lambda M$ de l'orbite critique $S^1 \cdot \zeta$ tel que $U \cap \{E < c\}$ est connexe [1]. Soit

$$s_0 := \min\{s \in [0,1] \mid \Gamma(s) \in S^1 \cdot \zeta\},$$
$$s_1 := \max\{s \in [0,1] \mid \Gamma(s) \in S^1 \cdot \zeta\}.$$

Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\Gamma(s_0-\epsilon), \Gamma(s_1+\epsilon) \in U \cap \{E < c\}$. En remplaçant la portion du chemin $\Gamma|_{[s_0-\epsilon, s_1+\epsilon]}$ par un chemin contenu dans $U \cap \{E < c\}$, on peut supposer que Γ ne passe pas par l'orbite critique $S^1 \cdot \zeta$. En répétant cette procedure pour un nombre fini de fois, on peut supposer qu'il n'existe pas $s \in [0,1]$ tel que $\Gamma(s) \in \mathrm{crit}(E) \cap E^{-1}(c)$ et $\mathrm{ind}(\Gamma(s)) \geq 2$. Vu que Γ intersect forcement $\mathrm{crit}(E) \cap E^{-1}(c)$, il doit passer par un point critique γ_m tel que $E(\gamma_m) = c$ et $\mathrm{ind}(\gamma_m) = 1$.

(c) Si $\gamma_m = \zeta^k$ pour un certain $\zeta \in \Lambda M$ et un certain $k \in \mathbb{N}$, alors on a $1 = \mathrm{ind}(\gamma_m) = k\,\mathrm{ind}(\zeta)$. Ceci implique $k = 1$.

(d) On a déjà prouvé que γ_m n'est pas iterée. Donc si $E(\gamma_m) \neq E(\gamma_n)$, les géodésiques fermées γ_m et γ_n sont géométriquement différents. Vu que

$$E(\gamma_m) \geq E(\alpha^{mk_2}) = (mk_2)^2 E(\alpha) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

la suite $\{\gamma_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ contient une infinité de géodésiques fermées géométriquement différentes.

(e) On applique la même astuce employée dans la preuve du théorème de Bangert-Hinston (i.e. envoyer un lacet à la fois le long d'un cylindre). Ceci nous donne une constante $\mathrm{const} > 0$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$L(\alpha^{mk_2}) < L(\gamma_m) \leq L(\alpha^{mk_2}) + \mathrm{const},$$

où $L : \Lambda M \to \mathbb{R}$ est la fonction longueur

$$L(\gamma) = \int_{S^1} g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\,\mathrm{d}t.$$

Soit $k > \frac{\mathrm{const}}{L(\alpha^{k_2})}$. Alors $L(\gamma_{m+k}) > L(\gamma_m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, ce qui implique que γ_m et γ_{m+k} sont géométriquement différentes. On conclut

$$\mathrm{cr}(L(\alpha^{mk_2}) + \mathrm{const}) \geq \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor,$$

c'est à dire

$$\mathrm{cr}(l) \geq \left\lfloor \frac{l - \mathrm{const}}{k\, L(\alpha^{k_2})} \right\rfloor. \qquad \blacksquare$$

1. Ce fait était donné dans l'indication.