DEVOIR MAISON 2 – 7 février 2014

Exercice 1. Soit x un maximum local strict d'une fonction lisse $F : M \to \mathbb{R}$, où M est une variété hilbertienne. On ne fait aucune hypothèse sur la hessienne de F au point critique x, qui pourrait être dégénéré et même pas Fredholm. Calculer l'homologie locale

$$L_*(F,x) := H_*(\{F < F(x)\} \cup \{x\}, \{F < F(x)\})$$

en distinguant les cas $\dim(M) < \infty$ et $\dim(M) = \infty$.

Exercice 2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale $F(x,y) = y^3 - 6x^2y^2 + 11x^4y - 6x^6$. Le seul point critique de F est l'origine, avec valeur critique zero. Calculer son indice de Morse, sa nullité, et son homologie locale.

Indication. Verifier avec un dessin que le sous-niveau fermé $\{F \leq 0\}$ est contractile et que les composantes connexes par arcs du sous-niveau ouvert $\{F < 0\}$ sont contractiles.

Exercice 3. Pour chaque entier $n \geq 1$, construire une fonction lisse $F_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ayant un point critique à l'origine avec homologie locale $L_1(F_n, 0) \cong \mathbb{Z}^n$.

Exercice 4. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lisse avec un point critique non-degeneré en l'origine, c'est-à-dire que $\mathrm{d}F(0) = 0$ et la hessienne $\mathrm{d}^2F(0)$ est une forme quadratique non-dégénérée. Prouver que l'origine est isolée dans l'ensemble des points critiques de F.

Exercice 5. Avec cet exercice, on va apprendre à "résoudre" les dégénérescences des points critiques. Soit $F : M \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les hypothèses typiques de la théorie du point critique : M est une variété hilbertienne complète ; F est C^2 et satisfait la condition de Palais-Smale. Soit x un point critique isolé de F tel que la hessienne $\mathrm{d}^2F(x)$ est Fredholm. Construire une fonction $F' : M \to \mathbb{R}$ qui soit arbitrairement proche de F en topologie C^2, qui coincide avec F en dehors d'un voisinage U de x arbitrairement petit, et ayant un nombre fini de points critique non-dégénérés dans U.

Indication. Voici le procedure à suivre :

- Utiliser le lemme de Morse-Gromoll-Meyer pour se réduire au cas $F : \mathbb{E} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $x = 0$, où F est la somme d'une forme quadratique non-dégénéré $Q : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ et d'une fonction $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec un point critique isolé et totalement dégénéré à l'origine.
- On fixe $r > 0$ arbitrairement petit. En particulier l'origine est le seul point critique de F dans la boule $\{\|z\|^2 + |y|^2 \leq r^2\}$. Pour chaque paramètre $v \in \mathbb{R}^n$ on considère la fonction $F_v : \mathbb{E} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $F_v(z,y) = F(z,y) + \rho(\|z\|^2 + |y|^2)\langle v, y\rangle$, où $\rho : [0,\infty) \to [0,1]$ est une fonction lisse telle que $\rho(t) = 1$ si $t \leq r^2/2$ et $\rho(t) = 0$ si $t > r^2$. Noter que $F_v \to F$ en topologie C^2 si $v \to 0$.
- Verifier que si la norme du paramètre v est suffisamment petite, F_v n'a pas de point critique dans l'anneau $\{r^2/2 \leq \|z\|^2 + |y|^2 \leq r^2\}$.

- Rappelons le lemme de Sard. Soit X une variété, et $f : X \to \mathbb{R}^n$ une fonction de régularité C^k, avec $k \geq \max\{1, 1 + \dim(X) - n\}$. Alors les valeurs critiques de f, c'est-à-dire les points $f(x)$ tels que $\mathrm{d}f(x)$ n'est pas surjective, forment un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue nulle.
- Par le lemme de Sard, les valeurs critiques de la fonction $H : \{|y|^2 \leq r^2/2\} \to \mathbb{R}^n$ définie par $H(y) = \mathrm{d}G(y)$ forment un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue nulle. Montrer que pour chaque valeur régulière $v \in \mathbb{R}^n$ de H de norme suffisamment petite, la fonction F_v satisfait les hypothèses voulues.

Exercice 6. Soit $\mathbb{E}$ un espace d'Hilbert séparable (de dimension finie ou infinie), $F : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ une fonction C^2, satisfaisant la condition de Palais-Smale, et ayant un point critique isolé en l'origine avec valeur critique $c = F(0)$. On denote par ϕ_t le flot de $-\nabla F$. Construire un voisinage fermé U de l'origine arbitrairement petit et satisfaisant la propriété suivante : il existe $\epsilon > 0$ tel que $U \subset \{F \geq c - \epsilon\}$, et si $x \in U$ et $\phi_t(x) \notin U$ pour un certain $t > 0$, alors $F(\phi_t(x)) < c - \epsilon$.

Indication. On peut supposer sans perte de généralité que $c = 0$. On introduit une fonction auxiliaire $G : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ donné par $G(x) = \delta \cdot F(x) + \frac{1}{2}\|x\|^2$. L'ensemble U aura la forme

$$U := \{-\epsilon \leq F \leq \epsilon\} \cap \{G \leq b\}.$$

Il faut montrer que avec un bon choix des paramètres positifs ϵ, δ, et b on obtient un voisinage arbitrairement petit avec les propriétés voulues. On procède de la façon suivant :

- On fixe un rayon $r > 0$ arbitrairement petit, en particulier tel que la boule fermée B_r ne contient pas de point critique de F en dehors de l'origine. Montrer qu'on peut fixer $\delta > 0$ suffisamment grand tel que $\langle \nabla F, \nabla G \rangle > 0$ dans l'anneau $\overline{B_r \setminus B_{r/2}}$.
- Maintenant qu'on a fixé les paramètres r et δ, choisir les autres paramètres ϵ et b de sorte qu'on obtient $B_{r/2} \cap \{-\epsilon \leq F \leq \epsilon\} \subset U \subset B_r$.
- Vérifier que l'ensemble U construit satisfait les propriétés demandées.

Exercice 7. Dans le cadre de l'exercice precedent, on definit $U^- := U \cap \{S = c - \epsilon\}$. Utiliser le lemme de déformation pour démontrer qu'on a un isomorphisme entre l'homologie locale $L_*(F, 0)$ et le groupe d'homologie relative $H_*(U, U^-)$.