DEVOIR MAISON 3 – 14 février 2014

Exercice 1. Soit $F : \mathbb{E}_0 \times \mathbb{E}_1 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $F(x_0, x_1) = G(x_0) + \|x_1\|^2$, où $G : \mathbb{E}_0 \to \mathbb{R}$ est une fonction C^2 ayant un point critique isolé en l'origine. Trouver la relation entre les groupes d'homologie locale $L_*(F, 0)$ et $L_*(G, 0)$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{E}$ un espace de Hilbert séparable (de dimension finie ou infinie), et $F : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ une fonction C^2, satisfaisant la condition de Palais-Smale. Supposons que l'origine soit un point critique isolé de F tel que la hessienne $\mathrm{d}^2F(0)$ soit de Fredholm. Démontrer que le rang de l'homologie locale $L_*(F, 0)$ est fini.

Indication. On considère le voisinage U de l'exercices 6 de la semaine dernière. Avec l'exercise 5 de la semaine dernière, on fait une perturbation C^2-petite de F dans U pour résoudre la dégénérescence du point critique 0. Donc on obtient une fonction $G : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec F en dehors de U, et ayant un nombre fini de points critiques non-dégénérés dans U. Remarquer que l'espace $U \cup \{G < c - \epsilon\}$ est invariant par le flot de $-\nabla G$, et utiliser les inégalités de Morse pour la fonction G "localisés" dans $(U \cup \{G < c - \epsilon\}, \{G < c - \epsilon\})$.

Exercice 3. Soit M une variété hilbertienne complète, et $F : M \to [0, \infty)$ une fonction C^2, satisfaisant Palais-Smale, et de Morse (i.e. n'ayant que des points critiques non-dégénérés). Supposons que F n'a pas de points critiques avec indice de Morse $d - 1$ et $d + 1$, pour un certain $d \geq 2$. Déterminer le rang du groupe d'homologie $H_d(M)$ en fonction de F.

Exercice 4. Chaque variété de dimension finie M admet une fonction de Morse (en fait, on peut même montrer que les fonctions de Morse sont denses dans les fonctions $C^k(M; \mathbb{R})$, pour tous nombres entiers $k \geq 2$). Utiliser ce fait pour prouver que chaque variété fermée (i.e. compacte sans bord) de dimension impaire a caractéristique d'Euler nulle, c'est-à-dire

$$\chi(M) := \sum_{i=0}^{\dim(M)} (-1)^i \,\mathrm{rang} H_i(M) = 0.$$

Exercice 5. Considérons l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$, défini comme le quotient de la sphère unité $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par la relation projective

$$(z_0, ..., z_n) \sim (e^{i\theta} z_0, ..., e^{i\theta} z_n), \qquad \forall (z_0, ..., z_n) \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1},\ \theta \in [0, 2\pi).$$

Les points de $\mathbb{C}P^n$ sont indiqués en coordonnées homogènes comme $[z_0 : ... : z_n]$. L'espace $\mathbb{C}P^n$ est une variété fermée de dimension $2n$ (en fait, c'est même une variété complexe). L'atlas canonique sur $\mathbb{C}P^n$ est composé de $n + 1$ cartes $\phi_j : U_j \to \mathbb{C}^n$, $j = 0, ..., n$, où

$$U_j = \{[z_0 : ... : z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_j \neq 0\}$$

et

$$\phi_j([z_0 : ... : z_n]) = \left(|z_j| \frac{z_0}{z_j}, |z_j| \frac{z_1}{z_j}, ..., |z_j| \frac{z_{j-1}}{z_j}, |z_j| \frac{z_{j+1}}{z_j}, ..., |z_j| \frac{z_{n-1}}{z_j}, |z_j| \frac{z_n}{z_j} \right).$$

Soit $F : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}$ la fonction

$$F([z_0 : ... : z_n]) = \sum_{j=0}^{n} j\, |z_j|^2.$$

Verifier que F est bien définie, calculer ses points critiques et leurs indices de Morse et nullités. Utiliser le résultat pour calculer l'homologie de l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$.