DEVOIR MAISON 6 – 14 mars 2014

Exercice 1. Soit $\Lambda^m M = W^{1,2}(\mathbb{R}/m\mathbb{Z}, M)$, et soit $A^m : \Lambda^m M \to \mathbb{R}$ la fonction action à période m définie par

$$A^m(\zeta) = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}/m\mathbb{Z}} L(t, \zeta(t), \dot{\zeta}(t))\, \mathrm{d}t.$$

Les courbes 1-périodiques sont en particulier m-périodiques pout tout $m \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $\Lambda^1 M$ est une sous-variété de $\Lambda^m M$. Si γ est un point critique de A^1, on a vu qu'il est également un point critique de A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$. En utilisant les lemmes de Bott, prouver les inégalités d'itération

$$m\,\overline{\mathrm{ind}}(\gamma) - 2\dim(M) \leq \mathrm{ind}(A^m, \gamma) \leq m\,\overline{\mathrm{ind}}(\gamma) - 2\dim(M) - \mathrm{nul}(A^m, \gamma),$$

où $\overline{\mathrm{ind}}(\gamma)$ est l'indice moyen de γ défini par

$$\overline{\mathrm{ind}}(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{ind}_{e^{i\theta}(\gamma)}\, \mathrm{d}\theta.$$

Exercice 2. Une conséquence des lemmes de Bott est que la fonction $m \mapsto \mathrm{ind}(A^m, \gamma)$ est bornée si et seulement si elle est identiquement nulle. Prouver cet énoncé de façon directe, i.e. sans utiliser la théorie de Bott.

Indication. On localise en γ, et on suppose que $\mathrm{ind}(A^{m_0}, \gamma) > 0$ pour un certain m_0. Sans perte de généralité, on peut supposer $m_0 = 1$. Donc il existe $\xi \in W^{1,2}(\mathbb{R}/m\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{d}^2 A^1(\gamma)[\xi, \xi] < 0$. Pour chaque $d > 0$, on veut utiliser ξ pour construire un espace vectoriel $V \subset W^{1,2}(\mathbb{R}/m\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$, où m est suffisamment grand, tel que $\dim(V) \geq d$ et $\mathrm{d}^2 A^m(\gamma)[\eta, \eta] < 0$ pour tout $\eta \in V \setminus \{0\}$. Voici quelques suggestions.

Montrer qu'il existe m_1 suffisamment grand et, pour tout $m > m_1 + 1$, il existe $\xi_m \in W^{1,2}(\mathbb{R}/m\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$ tels que

$$\xi_m(t) = \begin{cases} \xi(t) & \text{si } t \in [0, m_1], \\ 0 & \text{si } t \in [m_1 + 1, m - 1], \end{cases}$$

et $\mathrm{d}^2 A^m(\gamma)[\xi_m, \xi_m] < 0$.

Soient $\eta_1, \eta_2 \in W^{1,2}(\mathbb{R}/m\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$ tels que $\mathrm{d}^2 A^m(\gamma)[\eta_i, \eta_i] < 0$ pour $i = 1, 2$. Ceci n'implique pas que $\mathrm{d}^2 A^m(\gamma)$ soit défini négatif sur $\mathrm{vect}\{\eta_1, \eta_2\}$, mais cette implication est valide si les supports de η_1 et η_2 sont disjoints.