THÉORÈME DE KUNNETH

Pour simplifier la notation, on n'indique plus l'anneau R (sauf si nécessaire)

$$H^*(X,A) = H^*(X,A,R)$$

Notation. $A \subset X$, $B \subset Y$ ouverts

$$\boxed{(X,A)\times(Y,B) = (X\times Y,\ A\times Y \cup X\times B)}$$

Cup-produit croisé

$$\alpha \times \beta = p_1^*\alpha \smile p_2^*\beta \in H^*((X,A)\times(Y,B))$$

où $\alpha \in H^*(X,A)$, $\beta \in H^*(Y,B)$

$p_1 \ (X,A)\times(Y,\emptyset) \longrightarrow (X,A)$

$p_2 \cdot (X,\emptyset)\times(Y,B) \longrightarrow (Y,B)$

projections

Le cup-produit croisé donne un homomorphisme

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(X,A) \otimes_R H^j(Y,B) \xrightarrow{\times} H^{i+j}\big((X,A)\times(Y,B)\big)$$

⚠ Cela n'est pas toujours un isomorphisme !

exemple $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ espace discret infini, $R = \mathbb{Z}$

$$H^0(X) = \{\text{fonctions } f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\} = \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$$

$$H^0(X \times X) = \{\text{fonctions } f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\} = \mathrm{Map}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} H^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H^0(X) &\longrightarrow H^0(X \times X) \\ f \otimes g &\longmapsto f\circ p_1 \cdot f \circ p_2 \end{aligned} \qquad (*)$$

$p_1(x,y) = x$

$p_2(x,y) = y$

$F \quad \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \qquad F(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=y \\ 0 & \text{si } x\neq y \end{cases}$

$G := \{ F(x,\cdot) \mid x\in\mathbb{N}\} \cong \bigoplus_{x\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ n'est pas de type fini

cependant, pour toute $F . \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ de la forme
$F(x,y) = f_1(x)g_1(y) + . + f_n(x)\, g_n(x)$
$G := \{ F(x,\cdot) \mid x\in\mathbb{N}\}$ sous-groupe de $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$

$\Rightarrow$ L'homomorphisme (*) n'est pas surjectif

Rmq $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) = \underbrace{(\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus 0) \times \dots \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus 0)}_{\times n}$

On fixe le generateur e de $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus 0)$

suite exacte longue de $(-\infty, 0) \subset \mathbb{R}\setminus 0 \subset \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(\mathbb{R}, (-\infty,0)) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{R}\setminus 0, (-\infty,0)) & \xrightarrow[\text{conn}]{\delta} & H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus 0) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}, (-\infty,0)) \\
\| & & \cong & \cong & & & \| \\
0 & & H^0((0,\infty)) & & & & 0 \\
 & & 1 & \longmapsto & e & &
\end{array}$$

Thm (precurseur du thm de Thom)

Si A est un ouvert de X (ou, de manière plus generale, A est retraction par déformation d'un voisinage dans X)

on a un isomorphisme

$$H^k(X,A) \xrightarrow{\cong} H^{k+n}\big((X,A) \times (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)\big)$$

$$\alpha \longmapsto \alpha \times \underbrace{e^n}_{e \times \ldots \times e}$$

Preuve Il suffit de faire la preuve pour $n=1$, car

$$\alpha \times e^n = (\alpha \times e) \times e^{n-1}$$

- Supposons $A = \mathbb{Q}$

suite exacte longue de $X \times \underbrace{\mathbb{R}_-}_{(-\infty,0)} \subset X \times \mathbb{R} \setminus 0 \subset X \times \mathbb{R}$

$$
\begin{tikzcd}
 & H^k(X\times\mathbb{R}\setminus 0, X\times\mathbb{R}_-) \arrow[r, "\delta", "\cong"'] & H^{k+1}(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}\setminus 0) \arrow[d] & \\
\arrow[r] & H^k(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}_-) \arrow[u] & H^{k+1}(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}_-) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$

$$H^k(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}_-) = 0 \qquad H^{k+1}(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}_-) = 0$$

$\mathbb{R}_- = (-\infty, 0), \quad \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$

$\forall \; \alpha \in H^k(X)$

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & 1 \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & e \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
H^0(\mathbb{R}_+) \arrow[d, "\alpha\times"] & H^0(\mathbb{R}\setminus 0, \mathbb{R}_-) \arrow[l, "incl^*"', "\cong"] \arrow[r, "\delta", "\cong"'] \arrow[d, "\alpha\times"] & H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus 0) \arrow[d, "\alpha\times"] \\
H^k(X\times\mathbb{R}_+) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\cong$}"] & H^k(X\times\mathbb{R}\setminus 0, X\times\mathbb{R}_-) \arrow[l, "incl^*"', "\cong \text{ (par excision)}"] \arrow[r, "\delta", "\cong"'] & H^{k+1}(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}\setminus 0) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
H^k(X) \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & \alpha\times e \\
\alpha \arrow[urr, mapsto] & &
\end{tikzcd}
$$

• cas generale. on fix $\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus 0)$ t.q. $[\varepsilon] = e$

suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^{k-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\times\varepsilon"] & C^{k-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\times\varepsilon"] & C^{k-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\times\varepsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^k(X\times\mathbb{R}, \mathcal{U}) \arrow[r] & C^k(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}\setminus 0) \arrow[r] & C^k(A\times\mathbb{R}, A\times\mathbb{R}\setminus 0) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{U} = \{X\times\mathbb{R}\setminus 0, A\times\mathbb{R}\}$

La cohomologie de $C^*(X\times\mathbb{R}, \mathcal{U})$ est $H^*((X,A)\times(\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus 0))$

(par thm de petits chaînes)

$\alpha \longmapsto \alpha \times \mathcal{E}$ est un morphisme de cochaînes

$$\left(\begin{aligned} d(\alpha \times \mathcal{E}) &= d(p_1^*\alpha \smile p_2^*\mathcal{E}) = (d\, p_1^*\alpha) \smile p_2^*\mathcal{E} + p_1^*\alpha \smile (d\, p_2^*\mathcal{E}) \\ &= p_1^* d\alpha \smile p_2^*\mathcal{E} + p_1^*\alpha \smile p_2^* \underbrace{d\mathcal{E}}_{0} \\ &= (d\alpha) \times \mathcal{E} \end{aligned}\right)$$

on obtient un morphisme de suites exactes longues

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\delta"] & H^{k-1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\times e"] & H^{k-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\times e", "\cong"'] & H^{k-1}(A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\times e", "\cong"'] & \cdot \\
{} \arrow[r, "\delta", "\text{comm}"'] & H^k((X,A)\times(\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus 0)) \arrow[r] & H^k(X\times\mathbb{R}, X\times\mathbb{R}\setminus 0) \arrow[r] & H^k(A\times\mathbb{R}, A\times\mathbb{R}\setminus 0) \arrow[r, "\delta", "\text{Comm.}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

par le lemme des cinq

$$\begin{aligned} H^{k-1}(X,A) &\longrightarrow H^k((X,A)\times(\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus 0)) \\ \alpha &\longmapsto \alpha \times e \end{aligned}$$

est un isomorphisme

$\square$

Thm **(Formule de Künneth)**

X CW-complexe tq $H^*(X,\mathbb{Z})_{tor} = 0$

Y CW-complexe fini (i.e # cellules $< \infty$)

Alors, le cup-produit croisé donne un isomorphisme

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(X;\mathbb{Z}) \otimes H^j(Y;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times} H^n(X\times Y;\mathbb{Z})$$

Preuve (on n'indique pas le groupe des coefficients $\mathbb{Z}$)

Par induction sur $N = \#$ cellules de Y

- Vrai si $N = 1$ $\left(\text{i.e. } Y = Y^0 = \{p\}\right)$

- Supposons vrai pour $< N$ cellules

- $d = \underset{\max\{d \mid Y^d \neq Y^{d-1}\}}{\underset{\parallel}{\dim(Y)}}$, $e \subset Y^d$ d-cellule, $Z = Y \setminus \mathrm{int}(e)$

par hypothèse inductive, le thm vaut pour $X \times Z$

- Suite exacte courte de groupes abeliens libres

$$0 \longrightarrow C^j(Y,Z) \longrightarrow C^j(Y) \longrightarrow C^j(Z) \longrightarrow 0$$

elle reste exacte si on tensorise avec le groupe abelien sans torsion $H^i(X)$

Donc on a les suites exactes longues

$$\begin{tikzcd}
\longrightarrow \bigoplus_{i+j=m} H^i(X)\otimes H^j(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\times", "(*)"'] & \bigoplus_{i+j=m} H^i(X)\otimes H^j(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\times", "\cong"'] & \bigoplus_{i+j=m} H^i(X)\otimes H^{j+1}(Y,Z) \arrow[r] \arrow[d, "\times", "(*)"'] & \cdot \\
\longrightarrow H^m(X\times Y) \arrow[r] & H^m(X\times Z) \arrow[r] & H^{m+1}(X\times Y, X\times Z) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

- Si (*) est un isomorphisme, alors (*) est un isomorphisme grace au lemme des cinq

- Prouvons que (*) est un isomorphisme.

$$\left.\begin{aligned} &H^*(Y, \overset{Y\setminus \mathrm{int}(e)}{\overset{\shortparallel}{Z}}) \cong H^*(e, \partial e) \\ &H^*(X\times Y, X\times Z) \cong H^*(X\times e, X\times \partial e) \end{aligned}\right\} \text{ par excision}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\to \bigoplus_{i+j=n} H^i(X)\otimes H^j(e) \arrow[d, "\times", "\cong"'] \arrow[r] & \bigoplus_{i+j=n} H^i(X)\otimes H^j(e) \arrow[d, "\times", "\cong"'] \arrow[r] & \bigoplus_{i+j=n} H^i(X)\otimes \overset{H^{j+1}(Y,Z)}{\overset{\cong}{H^{j+1}}}(e,\partial e) \arrow[d, "\times", "\cong \text{ (par lemme des cinq)}"'] \arrow[r] & \cdot \\
\to H^n(X\times e) \arrow[r] & H^n(X\times \partial e) \arrow[r] & \underset{\underset{H^{n+1}(X\times Y, X\times Z)}{\cong}}{H^{n+1}(X\times e, X\times \partial e)} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

(isomorphismes par hypothèse inductive)

$\square$

Il y a une version plus forte.

Thm (Kunneth)

$\forall$ CW-complexes X, Y il y a une suite exacte courte

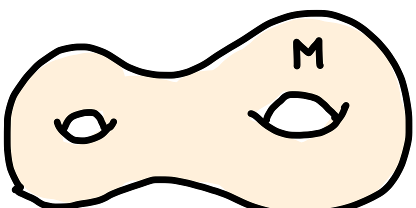
$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H_i(X;\mathbb{Z}) \otimes H_j(Y;\mathbb{Z}) \to H_n(X \times Y, \mathbb{Z}) \to \bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Tor}\big(H_i(X;\mathbb{Z}), H_{j-1}(Y,\mathbb{Z})\big) \to 0$$

LA CLASSE FONDAMENTALE DES VARIÉTÉS

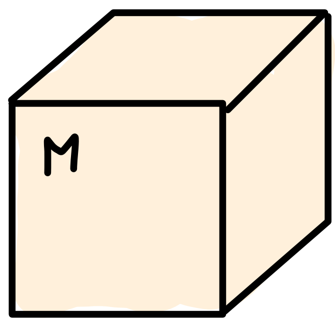
M^n **variété topologique** de dimension n

(espace topologique Hausdorff M t.q. $\forall x \in M$
$\exists\ U \subset M$ voisinage ouvert de x, $V \subset \mathbb{R}^n$ ouvert
$\phi : U \to V$ homéomorphisme)

exemples



(variété différentiable)



(variété pas différentiable)

$W \subset M$ **homologie locale** de W $H_i(M, M \setminus W)$ (coefficients dans un groupe abelien arbitraire)

$\cong$ excision

$H_i(U, U \setminus W)$ $\forall\, U \subset M$ voisinage de W

Lemme $\forall\, K \subset M^n$ compact

- $H_i(M, M\setminus K) = 0 \quad \forall\, i \geq n+1$
- $\forall\, h \in H_n(M, M\setminus K)$ on a $h = 0$ si $\iota_x(h) = 0 \quad \forall\, x \in K$

où $\iota_x : H_n(M, M\setminus K) \xrightarrow{incl_*} H_n(M, M\setminus\{x\})$

Preuve

- Si thm est vrai pour $K_1, K_2, K_1 \cap K_2 \subset M^n$ alors il est vrai pour $K = K_1 \cup K_2$ egalement

Si $h \in H_n(M, M\setminus K)$ tq $r_x(h) = 0 \quad \forall x \in K$

alors

$$
\begin{tikzcd}
h \arrow[r, mapsto] & 0 \\[-20pt]
\rotatebox{90}{$\in$} & \\[-20pt]
H_n(M, M\setminus K) \arrow[r, "incl_*"] \arrow[dr, "r_x"'] & H_n(M, M\setminus K_i) \arrow[d, "incl_*"] \\
& H_n(M, M\setminus\{x\})
\end{tikzcd}
\qquad \forall x \in K_i
$$

Mayer-Vietoris

$$(M, M\setminus K_1) \cup (M, M\setminus K_2) = (M, M\setminus(K_1 \cap K_2))$$
$$(M, M\setminus K_1) \cap (M, M\setminus K_2) = (M, M\setminus K)$$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H_{m+1}(M, M\setminus(K_1\cap K_2))} \xrightarrow{\partial_*} H_m(M, M\setminus K) \hookrightarrow H_m(M, M\setminus K_1) \oplus H_m(M, M\setminus K_2)$$

$$h \longmapsto (0,0)$$

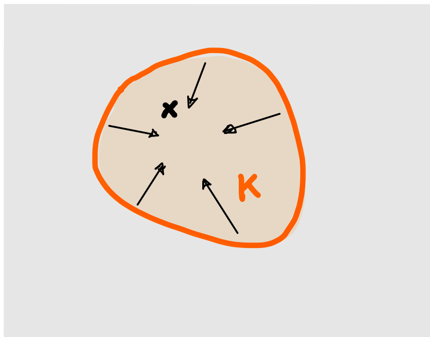
$\Rightarrow h = 0$ (2ème point)

$\forall\, i \geq m+1$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H_{i+1}(M, M\setminus(K_1\cap K_2))} \xrightarrow{\partial_*} H_i(M, M\setminus K) \hookrightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_i(M, M\setminus K_1)} \oplus \underset{\substack{\| \\ 0}}{H_i(M, M\setminus K_2)}$$

$\Rightarrow H_i(M, M\setminus K) = 0$ (1er point)

- Thm est vrai pour $M = \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^m$ convexe comp



$$\mathbb{R}^m \setminus K \xhookrightarrow{\text{incl}} \mathbb{R}^m \setminus \{x\}$$

est une equivalence d'homotopie

$$H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus K) \xrightarrow[\cong]{\text{incl}_*} H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} G, & i = m \\ 0, & i \neq m \end{cases}$$

- Thm vrai pour $M = \mathbb{R}^n$, $K = K_1 \cup .. \cup K_k$, où $K_i \subset \mathbb{R}^n$ convexe compacte

Par induction

1) vrai pour $k = 2$

2) supposons vrai pour $k-1$

3) vrai pour K_k, $K_1 \cup . \cup K_{k-1}$, et pour

$$K_k \cap (K_1 \cup . \cup K_{k-1}) = \underbrace{(K_1 \cap K_k)}_{\text{convexe}} \cup \underbrace{(K_2 \cap K_k)}_{\text{convexe}} \cup . \cup \underbrace{(K_{k-1} \cap K_k)}_{\text{convexe}}$$

donc vrai pour $K_1 \cup . \cup K_k$

- **Thm vrai si $M = \mathbb{R}^n$, K compact**

$h = [\sigma] \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ tq $\iota_x(h) = 0 \ \forall x \in K$

$\underbrace{\partial\sigma}_{\text{compact}} \subset \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus K}_{\text{open}} \Rightarrow \exists N \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de K tq $\partial\sigma \subset \mathbb{R}^n \setminus N$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} h' = [\sigma] & \longmapsto & h \\ \cap & & \cap \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus N) & \longmapsto & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \end{array}$$

$B = B_1 \cup .. \cup B_k \subset N$ voisinage de K tq. B_i convexe compact, $B_i \cap K \neq \emptyset$

$$\begin{tikzcd}
h' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & h'' \arrow[r, mapsto] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & h \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus N) \arrow[r] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \arrow[r] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)
\end{tikzcd}$$

Prouvons que $h'' = 0$ (cela implique $h = 0$).

$\forall x \in B_1 \cap K$, $y \in B_i$, on a

$$\begin{tikzcd}
& H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \ni h'' \arrow[d] & \\
& H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_i) \ni h_i \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\
H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\}) & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \ni 0
\end{tikzcd}$$

$h'' \mapsto h_i \mapsto 0$

donc $\quad h'' \longmapsto 0$

$$\begin{array}{c} \cap \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\}) \end{array} \qquad \forall y \in B$$

$\Rightarrow \; h'' = 0$

- **Cas generale $\quad K \subset M$**

$K = K_1 \cup .. \cup K_k$, où $K_i \subset \underbrace{U_i}_{\text{domaine d'une carte}}$

Thm vrai pour $K_i \subset M$

par induction. vrai pour $K = K_1 \cup . \cup K_k$ $\qquad \square$