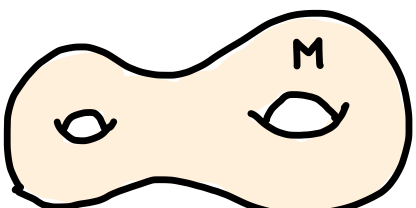
LA CLASSE FONDAMENTALE DES VARIÉTÉS

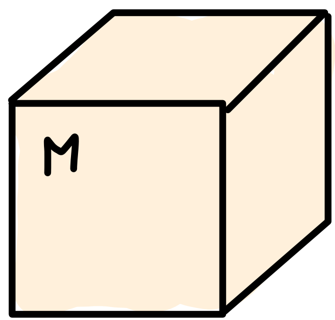
M^n variété topologique de dimension n

espace topologique Hausdorff M t.q. $\forall x \in M$
$\exists\ U \subset M$ voisinage ouvert de x, $V \subset \mathbb{R}^n$ ouvert
$\phi : U \to V$ homeomorphisme

exemples



(variété différentiable)



(variété pas différentiable)

$W \subset M$ **homologie locale de W** $H_i(M, M \setminus W)$ (coefficients dans un groupe abelien arbitraire)

$\cong$ excision

$H_i(U, U \setminus W)$ $\forall\ U \subset M$ voisinage de W

Lemme M^n variété top, $\forall$ compact $K \subset M^n$

- $H_i(M, M\setminus K) = 0 \quad \forall i \geq n+1$
- $\forall h \in H_n(M, M\setminus K)$ on a $h = 0$ si $\iota_x(h) = 0 \ \forall x \in K$

où $\iota_x : H_n(M, M\setminus K) \xrightarrow{incl_*} H_n(M, M\setminus\{x\})$

Preuve

- Si thm est vrai pour $K_1, K_2, K_1 \cap K_2 \subset M^n$ alors il est vrai pour $K = K_1 \cup K_2$ egalement

Si $h \in H_n(M, M \setminus K)$ tq $r_x(h) = 0 \quad \forall\, x \in K$
alors

$$\begin{tikzcd}
h \arrow[r, mapsto] & 0 \\
\rotatebox{90}{$\in$} & \\
H_n(M, M\setminus K) \arrow[r, "incl_*"] \arrow[dr, "r_x"'] & H_n(M, M\setminus K_i) \arrow[d, "incl_*"] \\
& H_n(M, M\setminus\{x\})
\end{tikzcd} \qquad \forall\, x \in K_i$$

Mayer-Vietoris

$$(M, M\setminus K_1) \cup (M, M\setminus K_2) = (M, M\setminus(K_1 \cap K_2))$$

$$(M, M\setminus K_1) \cap (M, M\setminus K_2) = (M, M\setminus K)$$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H_{n+1}(M, M\setminus(K_1 \cap K_2))} \xrightarrow{\partial_*} H_n(M, M\setminus K) \hookrightarrow H_n(M, M\setminus K_1) \oplus H_n(M, M\setminus K_2)$$

$$h \longmapsto (0,0)$$

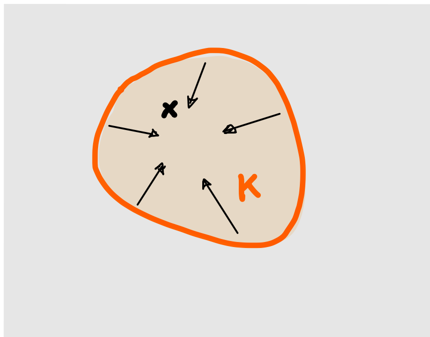
$$\Rightarrow h = 0 \qquad \text{(2ème point)}$$

$\forall\, i \geq n+1$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H_{i+1}(M, M\setminus(K_1 \cap K_2))} \xrightarrow{\partial_*} H_i(M, M\setminus K) \hookrightarrow H_i\underset{\substack{\| \\ 0}}{(M, M\setminus K_1)} \oplus H_i\underset{\substack{\| \\ 0}}{(M, M\setminus K_2)}$$

$$\Rightarrow H_i(M, M\setminus K) = 0 \qquad \text{(1er point)}$$

- Lemme est vrai pour $M = \mathbb{R}^m$, $K \subset \mathbb{R}^m$ convexe comp



$$\mathbb{R}^m \setminus K \xhookrightarrow{incl} \mathbb{R}^m \setminus \{x\}$$

est une equivalence d'homotopie

$$H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus K) \xrightarrow[\cong]{incl_*} H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} G, & i = m \\ 0, & i \neq m \end{cases}$$

- Thm vrai pour $M = \mathbb{R}^n$, $K = K_1 \cup .. \cup K_k$, où $K_i \subset \mathbb{R}^n$ convexe compacte

Par induction

1) vrai pour $k=2$

2) supposons vrai pour $k-1$

3) vrai pour K_k, $K_1 \cup . \cup K_{k-1}$, et pour

$$K_k \cap (K_1 \cup . \cup K_{k-1}) = \underbrace{(K_1 \cap K_k)}_{\text{convexe}} \cup \underbrace{(K_2 \cap K_k)}_{\text{convexe}} \cup . \cup \underbrace{(K_{k-1} \cap K_k)}_{\text{convexe}}$$

donc vrai pour $K_1 \cup . \cup K_k$

- **Thm vrai si $M = \mathbb{R}^n$, K compact**

$h = [\sigma] \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ tq $r_x(h) = 0 \quad \forall x \in K$

$\underbrace{\partial\sigma}_{\text{compact}} \subset \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus K}_{\text{open}} \Rightarrow \exists\, N \subset \mathbb{R}^n$ voisinage de K tq $\partial\sigma \subset \mathbb{R}^n \setminus N$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} h' = [\sigma] & \longmapsto & h \\ \cap & & \cap \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus N) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \end{array}$$

$B = B_1 \cup .. \cup B_r \subset N$ voisinage de K tq. B_i convexe compact

$B_i \cap K \neq \emptyset$

$$
\begin{tikzcd}
h' \arrow[r, mapsto] & h'' \arrow[r, mapsto] & h \\
H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus N) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"]
\end{tikzcd}
$$

Prouvons que $h'' = 0$ (cela implique $h = 0$).

$\forall x \in B_1 \cap K$, $y \in B_i$, on a

$$
\begin{tikzcd}
& H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \ni h'' \arrow[d] \arrow[d, mapsto, shift left=8ex] & \\
& H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_i) \ni h_i \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] \arrow[r, mapsto] & 0 \\
H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\}) & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"]
\end{tikzcd}
$$

donc $\quad h'' \longmapsto 0$

$$\begin{array}{c} h'' \\ \cap \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\}) \end{array} \qquad \forall y \in B$$

$\Rightarrow \quad h'' = 0$

De manière analogue, on a $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) = 0$ $\forall i \geq n+1$

$\forall \, [\sigma] \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$

$\partial \sigma \subset \mathbb{R}^n \setminus B$ pour un certain voisinage B de K tq $B = B_1 \cup \ldots \cup B_r$, $B_i \subset \mathbb{R}^n$ convexe compact

Donc

$$\begin{array}{ccc} \overset{\displaystyle 0}{\overset{\shortparallel}{H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)}} & \longrightarrow & H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ [\sigma] & \longmapsto & [\sigma] \end{array}$$

et $[\sigma] = 0$ dans $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$

- **Cas generale $K \subset M$**

$K = K_1 \cup .. \cup K_k$, où $K_i \subset \underbrace{U_i}_{\text{domeine d'une carte}}$

thm vrai pour $K_1 \subset M$

par induction. vrai pour $K = K_1 \cup . \cup K_k$ $\square$

ORIENTABILITÉ ET CLASSE FONDAMENTALE

- Variété différentiable orientée M^n.

$$\left[\begin{array}{l} M = \bigcup_\alpha U_\alpha , \quad \text{avec cartes } \phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n \\ \text{tq. } \det\left(d(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(y)\right) > 0 \quad \forall y \in \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \end{array}\right.$$

Et si M est seulement une variété topologique ?

coefficients $G = \mathbb{Z}$

$n = \dim(M)$

- $H_n(M, M\setminus\{x\}) \cong \mathbb{Z}$
  $\quad\;\rotatebox{90}{$\in$}$
  μ_x generateur

  (on a un autre generateur : $-\mu_x$)

(car, si $U \subset M$ voisinage de x homeomorphe à B^n, alors

$$H_n(M, M\setminus\{x\}) \underset{\text{exc.}}{\cong} H_n(U, U\setminus\{x\}) \cong H_n(B^n, B^n\setminus\{0\}) \cong \mathbb{Z}$$
)

- μ_x determine $\mu_y \in H_n(M, M\setminus\{y\})$ $\forall y$ près de x.

si $B \subset M$ est un voisinage de x homeomorphe à une boule, alors

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M, M\setminus\{x\}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(M, M\setminus B) & \xrightarrow{\cong} & H_n(M, M\setminus\{y\}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\ \mu_x & \longleftarrow\!\shortmid & \mu & \shortmid\!\longrightarrow & \mu_y \end{array}$$

- Une variété topologique M^n est **orientable** si elle admet une **orientation**, i.e

$$\left\{ \mu_x \text{ générateur de } H_n(M, M\setminus\{x\}) \mid x \in M \right\}$$

t.q. $\forall$ boule ouverte $B \subset M$, $x, y \in B^n$

$$\begin{array}{ccccc} H_n(M, M\setminus\{x\}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(M, M\setminus B) & \xrightarrow{\cong} & H_n(M, M\setminus\{y\}) \\ \mu_x & & \longmapsto & & \mu_y \end{array}$$

(intuitivement "$x \mapsto \mu_x$ est continue")

exercice Si M^n est une variété différentiable, les deux notions d'orientabilité coïncident

$$\left(\begin{array}{ll} \textbf{Indication} & \text{Si } \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ difféomorphisme t.q.} \\ & \det(d\phi(x)) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(0) = 0 \\ & \text{alors} \quad \phi_* = id_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \end{array} \right)$$

Thm M^n variété topologique orientée

$\forall K \subset M$ compact $\exists!\ \mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$ tq.

$$\begin{aligned} H_n(M, M\setminus K) &\longrightarrow H_n(M, M\setminus\{x\}) \\ \mu_K &\longmapsto \mu_x \qquad \forall x \in K \end{aligned}$$

Preuve

- Si μ_K, μ_K' ont cette propriété, alors

$$\begin{aligned} H_n(M, M\setminus K) &\longrightarrow H_n(M, M\setminus\{x\}) \\ \mu_K - \mu_K' &\longmapsto \mu_x - \mu_x = 0 \qquad \forall x \in K \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu_K = \mu_K'$ (par le lemme)

- Une telle μ_K existe si $K \subset B$, où B boule compacte, car

$$
\begin{tikzcd}
H_n(M, M\setminus B) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & H_n(M, M\setminus\{x\}) \\
& H_n(M, M\setminus K) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\quad \forall x
$$

- Supposons d'avoir des telles μ_{K_1}, μ_{K_2}

$K := K_1 \cup K_2$,

$$H_n(M, M\setminus K_i) \longrightarrow H_n(M, M\setminus(K_1 \cap K_2))$$

$$\mu_{K_i} \longmapsto \mu'_{K_i}$$

$$\mu'_{K_1} = \mu'_{K_2} \qquad \text{(par le lemme)}$$

Mayer-Vietoris.

$$H_{n+1}(M, M \setminus (K_1 \cap K_2)) \to H_n(M, M\setminus K) \hookrightarrow H_n(M, M\setminus K_1) \oplus H_n(M, M \setminus K_2) \to H_n(M, M\setminus (K_1\cap K_2))$$

$$\overset{\shortparallel}{0} \qquad \exists\ \mu_K \longmapsto (\mu_{K_1}, \mu_{K_2}) \longmapsto 0$$

- $K \subset M$ compact arbitraire

$\Rightarrow \exists$ boules $B_i \subset M$ tq $K \subset B_1 \cup \ldots \cup B_k$

$K_i = K \cap B_i$

$\Rightarrow \exists\ \mu_{K_i} \Rightarrow \exists\ \mu_K$

$\square$

Si M est fermée (i.e compacte) alors

on peut prendre $K = M$

($\partial M = \emptyset$)

$$\mu_M \in H_m(M)$$

classe fondamentale

(parfois indiquée par $\mu_M = [M]$)

Rmq Toute variété topologique M^n est "$\mathbb{Z}_2$- orientable"

$$H_n(M, M\setminus\{x\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

μ_x unique generateur ($\mu_x \in H_n(M, M\setminus\{x\}; \mathbb{Z}_2)$)

$\Rightarrow \forall K \subset M$ compact $\exists! \, \mu_K \in H_n(M, M\setminus K, \mathbb{Z}_2)$

tq $\mu_K \longmapsto \mu_x \quad \forall x \in M$

(en fait il y a une seule $\mathbb{Z}_2$-orientation sur toute M)

Generalisation pour variétés topologiques M^n à bord $\partial M \neq \emptyset$

M Hausdorff

$\forall x \in M \quad \exists U \subset M$ voisinage de x, $\quad V \subset \overbrace{\mathbb{H}^n}^{\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}}$ ouvert

$\phi : U \longrightarrow V$ homeomorphisme

bord $\partial M \subset M$ t.q. $\quad U \cap \partial M = \phi^{-1}\big(\underbrace{\partial \mathbb{H}^n}_{=\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}}\big)$

Orientation $\quad \{\underbrace{\mu_x}_{\text{générateur de } H_n(M, M \setminus \{x\})} \mid x \in M \setminus \partial M\}$

- M^m à bord est orientée ssi $\forall\ K \subset M$ compacte $\exists\ \mu_K \in H_m(M, (M \setminus K) \cup \partial M)$ tq

$$H_m(M, (M\setminus K) \cup \partial M) \longrightarrow H_m(M, M\setminus\{x\})$$
$$\mu_K \longmapsto \mu_x$$

- Si M est compacte et orientée, on peut prendre $K = M$

$$\mu_M \in H_m(M, \partial M)$$

classe fondamentale

(parfois indiquée $\mu_M = [M, \partial M]$)

COHOMOLOGIE À SUPPORT COMPACT

X espace topologique

cochaîne $\varphi \in C^i(X;G)$

φ a support compact quand $\exists\, K \subset X$ compact
tq $\varphi(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in C_i(X \setminus K)$ (on dit $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$)

$$C^i_{comp}(X;G) := \{ \varphi \in C^i(X) \text{ a support compact} \}$$

$\forall\ \psi \in C^1_{comp}(X, G)$ on a que

$d\psi$ est également à support compact

$$\left(\begin{array}{l} \text{si } \operatorname{supp}(\psi) \underset{comp}{\subset} K \\ \text{alors } \underbrace{(d\psi)(\sigma)}_{\psi(\underbrace{\partial\sigma}_{\subset X\setminus K})} = 0 \qquad \forall \sigma \in C_{i+1}(X \setminus K) \end{array} \right)$$

$$0 \longrightarrow C^0_{comp}(X;G) \xrightarrow{d_0} C^1_{comp}(X,G) \xrightarrow{d_1} C^2_{comp}(X;G) \xrightarrow{d_2}$$

cohomologie à support compact

$$H^i_{comp}(X,G) = \frac{\operatorname{Ker} d_i}{\operatorname{Im} d_{i-1}}$$

On a un système direct

$$J^*_{K_2K_1} \quad H^i(X, X \setminus K_1, G) \xrightarrow{incl_*} H^i(X, X \setminus K_2; G)$$

$$\forall K_1 \subset K_2 \subset X \text{ compacts}$$

limite directe $\displaystyle\varinjlim_{\substack{K \\ \text{compact}}} H^i(X, X\setminus K) = \coprod_{\substack{K\subseteq X \\ \text{compact}}} H^i(X, X\setminus K) /\sim$

où $\psi_1 \sim \psi_2$ si $\exists$ compact $K \supset K_1 \cup K_2$

$\psi_1 \in H^i(X; X\setminus K_1)$, $\psi_2 \in H^i(X, X\setminus K_2)$ tq $J^*_{KK_1}\psi_1 = J^*_{KK_2}\psi_2$

Prop $\displaystyle H^i_{comp}(X) \cong \varinjlim_{K} H^i(X, X\setminus K)$

Preuve $\forall\ [\psi] \in H^i_{comp}(X)$, on a $\psi \in C^i(X, X\setminus K)$ pour un certain compact $K \supset \mathrm{supp}(\psi)$

cocycles $\psi_J \in C^i(X, X \setminus K_J)$, $d\psi_J = 0$

$[\psi_1] = [\psi_2]$ dans $\varinjlim_K H^i(X, X \setminus K)$

ssi

$\exists$ compact $K \supset K_1 \cup K_2$, $\phi \in C^{i-1}(X, X \setminus K)$

tq. $\psi_1 - \psi_2 = d\phi$ dans $C^i(X, X \setminus K)$

(i.e $[\psi_1] = [\psi_2]$ dans $H^i_{comp}(X)$)

$\square$

Rmq $H^i_{comp}(X) = H^i(X)$ si X est compact

exemple

$$H^i_{comp}(\mathbb{R}^n) \cong \varinjlim_K H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \cong \varinjlim_r H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \overbrace{B^n_r}^{\text{boule de rayon } r})$$

$\forall$ compact $K \subset \mathbb{R}^n$
$\exists\, r > 0$ t.q. $K \subset B^n_r$

$\forall\, r_1 < r_2$

$$H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B^n_{r_1}) \xrightarrow{\cong} H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B^n_{r_2}) \cong \begin{cases} G & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{H^i_{comp}(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} G & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}}$$

Prop $\overbrace{X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \cdots}^{\text{filtration de } X}$, $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$

t q toute compact $K \subset X$ est contenu dans un certain X_n

Alors $H_i(X) \cong \varinjlim_n H_i(X_n)$

Preuve $\varinjlim_n H_i(X_n) \xrightarrow{\iota_*} H_i(X)$ induit par les inclusions $X_n \subset X$

ι_* surjectif. $\forall [\sigma] \in H_i(X)$ on a $\sigma \subset X_n$ pour un certain n

$$\Rightarrow [\sigma] \in H_1(X_n)$$

ι_* injectif : si $\iota_* h = 0$, alors

$$h = [\sigma], \quad [\sigma] \in H_i(X_n)$$

$$\sigma = \partial \eta, \text{ où } \eta \in C_{i+1}(X)$$

mais $\eta \subset X_m$ pour un certain $m \geq n$

donc $\sigma = \partial \eta$ dans $C_{i+1}(X_m)$

$$[\sigma] = 0 \text{ dans } H_i(X_m)$$

$$\Rightarrow h = 0$$

$\square$

(coefficients $\mathbb{Z}$)

Prop Si M^n est une variété topologique orientée

$\exists$ homomorphisme $H^n_{comp}(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$

(evaluation sur M) $[\psi] \longmapsto \psi(\sigma)$

où $supp(\psi) \subset K$

$[\sigma] = \mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$

Preuve • μ_K générateur de $H_n(M, M\setminus K)$ donné par l'orientation de M

$\mu_K = [\sigma]$

$\psi, d\beta \in C^n(M, M\setminus K)$ tq $d\psi = 0$

$$(\psi + d\beta)(\sigma + \underset{}{\overset{C_n(M\setminus K)}{\overset{\cup}{\eta}}}) = \psi(\sigma) \Rightarrow \psi(\sigma) \text{ dépend seulement de } [\psi], [\sigma] = \mu_K$$

supp ψ, supp $\beta \subset K$

$d\beta(\sigma) = \beta(\underbrace{\partial\sigma}_{\subset M\setminus K}) = 0$

• si $K_1, K_2 \subset M$ compacts tq $\text{supp}(\psi) \subset K_1 \cap K_2$

$\mu_{K_i} = [\sigma_i]$, $i = 1, 2$ $\Rightarrow$ $\mu_{K_1 \cap K_2} = [\sigma_1] = [\sigma_2]$ $\square$