Thm (Mayer-Vietoris)

Si $U, V \subset X$ tq. $\operatorname{int}(U) \cup \operatorname{int}(V) = X$, alors il y a une suite exacte longue

$$\xrightarrow{\delta} H^i_{comp}(U \cap V) \longrightarrow H^i_{comp}(U) \oplus H^i_{comp}(V) \longrightarrow H^i_{comp}(X) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}_{comp}(U \cap V) \to \cdots$$

Preuve

$\forall$ compacts $K \subset U$, $L \subset V$, on a la suite exacte longue de Mayer-Vietoris

$$\xrightarrow{\delta} \underset{\substack{\cong \\ H^i(U\cap V, (U\cap V)\setminus(K\cap L))}}{H^i(X, X\setminus(K\cap L))} \longrightarrow \underset{\substack{\cong \\ H^i(U, U\setminus K)}}{H^i(X, X\setminus K)} \oplus \underset{\substack{\cong \\ H^i(V, V\setminus L)}}{H^i(X, X\setminus L)} \longrightarrow H^i(X, X\setminus(K\cup L)) \xrightarrow{\delta} .$$

par excision

on prend ensuite la limite directe $\square$

CAP-PRODUIT

X espace topologique

R anneau

cap-produit
$$C_{k+j}(X;R) \otimes_R C^k(X,R) \xrightarrow{\frown} C_j(X,R)$$
$$\sigma \otimes \psi \longmapsto \sigma \frown \psi$$

$$\underbrace{\sigma}_{\text{(k+j)-simplexe singulier}} \frown \psi := \psi(\underbrace{\sigma|_{[e_0 \; e_k]}}_{\text{k-face avant de } \sigma}) \underbrace{\sigma|_{[e_k \; e_{k+j}]}}_{\text{j-face arrière de } \sigma}$$

Propriétés

- $\psi_1 \in C^a(X, R)$, $\psi_2 \in C^b(X; R)$, $\sigma \in C_{a+b}(X, R)$

$$\psi_2(\sigma \frown \psi_1) = (\psi_1 \smile \psi_2)(\sigma)$$

- (règle de Leibniz)

$\forall \sigma \in C_{a+b}(X, R)$, $\psi \in C^a(X; R)$

$$\partial(\sigma \frown \psi) = (-1)^a\left((\partial\sigma) \frown \psi - \sigma \frown (d\psi)\right)$$

Preuve

$\forall\ \sigma \in C_{a+b}(X;R),\ \psi \in C^{a}(X;R),\ \phi \in C^{b-1}(X,R)$

$$\phi\left(\partial(\sigma \frown \psi)\right) = (d\phi)(\sigma \frown \psi) = (\psi \smile d\phi)(\sigma)$$

$$= (-1)^{a}\left(d(\psi \smile \phi)(\sigma) - (d\psi)\smile\phi\,(\sigma)\right)$$

$$= (-1)^{a}\left((\psi \smile \phi)(\partial\sigma) - \phi(\sigma \frown d\psi)\right)$$

$$= \phi\left((-1)^{a}\left(\partial\sigma \frown \psi - \sigma \frown d\psi\right)\right)$$

$\square$

- Si $\partial\sigma = 0$ alors $\partial(\sigma \frown \psi) = \pm\, \sigma \frown d\psi$
- Si $d\psi = 0$ alors $\partial(\sigma \frown \psi) = \pm\, (\partial\sigma) \frown \psi$

$\Rightarrow$ si $\partial\sigma = 0$ et $d\psi = 0$ alors $\partial(\sigma \frown \psi) = 0$

$\Rightarrow$ on obtient un cap-produit entre homologie et cohomologie.

$$H_{a+b}(X, R) \otimes_R H^a(X; R) \xrightarrow{\frown} H_b(X, R)$$

$$[\sigma] \otimes [\psi] \longmapsto [\sigma] \frown [\psi] = [\sigma \frown \psi]$$

- En homologie rélative de $A \subset X$, on obtient un cap-produit.

$$H_{a+b}(X,A;R) \otimes_R H^a(X;R) \xrightarrow{\frown} H_b(X,A;R)$$

$$H_{a+b}(X,A;R) \otimes_R H^a(X,A;R) \xrightarrow{\frown} H_b(X;R)$$

(bien défini, car $\forall\, \sigma \in C_{a+b}(X)$ $\quad \psi \in C^a(X,A)$

t.q. $\partial\sigma \in C_{a+b-1}(A)$, $d\psi = 0$

on a $\partial(\sigma \frown \psi) = \pm \underbrace{(\partial\sigma) \frown \psi}_{=0} \pm \sigma \frown \underbrace{(d\psi)}_{=0} = 0$

car $\partial\sigma \subset A$)

- $f\ X \to Y$ continue

$$f_*(\sigma \cap f^*\psi) = (f_*\sigma) \cap \psi \qquad \forall\, \sigma \in H_{a+b}(X)$$
$$\psi \in H^a(Y)$$

DUALITÉ DE POINCARÉ

M^n variété topologique R-orientée, $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$

(on n'indiquera pas R)

$$PD \quad H^i_{comp}(M) \longrightarrow H_{n-i}(M)$$

$$H^i_{comp}(M) \cong \varinjlim_K H^i(M, M \setminus K)$$

$PD([\varphi]) = \mu_K \frown \varphi$ où $\varphi \in H^i(M, M\setminus K)$

$K \subset M$ compact

Vérifions que PD est bien défini

Si $[\psi_1] = [\psi_2] \in H^i_{comp}(M)$, où $\psi_J \in H^i(M, M\setminus K_J)$

$K_1 \subset K_2$

alors $J_{K_1K_2} : (M, M\setminus K_2) \xhookrightarrow{incl} (M, M\setminus K_1)$

$$\psi_2 = J^*_{K_1K_2}\psi_1$$

$$\mu_{K_1} \frown \psi_1 = (J_{K_1K_2*}\mu_{K_2}) \frown \psi_1 = J_{K_1K_2*}\left(\mu_{K_2} \frown J^*_{K_1K_2}\psi_1\right)$$

$$= \underset{\underset{id_*}{\shortparallel}}{J_{K_1K_2*}}\left(\underbrace{\mu_{K_2} \frown \psi_2}_{\in H_{n-i}(M)}\right) = \mu_{K_2} \frown \psi_2$$

Thm (Dualité de Poincaré) $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$

Si M^n est une variété topologique R-orientée,

alors $PD \quad H^i_{comp}(M) \xrightarrow{\cong} H_{n-i}(M)$ est un isomorphisme

Rmq

- Toute variété est $\mathbb{Z}_2$-orientable
- Si M^n est fermée, alors $PD \cdot H^i(M) \xrightarrow{\cong} H_{n-i}(M)$

Preuve (on fait la preuve pour $R = \mathbb{Z}$; le cas $R = \mathbb{Z}_2$ est analogue)

- $M = \mathbb{R}^n$, $\quad B^n \subset \mathbb{R}^n$ boule

$$H_i(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} \qquad\qquad H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

Thm des coeff univ

$$0 \to \mathrm{Ext}(\underbrace{H_{i-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)}_{= 0}, \mathbb{Z}) \to H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B), \mathbb{Z}) \to 0$$

Soit ψ le generateur de $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$ t.q. $\underbrace{\psi(\mu_B)}_{\mu_B \frown \psi} = 1$

$$\Rightarrow \quad H^i_{comp}(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

$[\psi]$ générateur de $H^n_{comp}(\mathbb{R}^n)$

$PD([\psi]) = \mu_B \frown \psi = \psi(\mu_B) = 1$ générateur de $H_0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ PD est un isomorphisme

Donc le thm vaut pour $M = \mathbb{R}^n$

- Si le thm est vrai pour les ouverts $U, V \subset M$ et $U \cap V$, alors il est vrai pour $U \cup V$

suites exactes de Mayer-Vietoris.

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r, "\delta"] & H^i_{comp}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "PD", "\cong"'] & H^i_{comp}(U) \oplus H^i_{comp}(V) \arrow[r] \arrow[d, "PD \oplus PD", "\cong"'] & H^i_{comp}(U \cup V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "PD"] & {} \\
\arrow[r, "\partial"] & H_{m-i}(U \cap V) \arrow[r] & H_{m-i}(U) \oplus H_{m-i}(V) \arrow[r] & H_{m-i}(U \cup V) \arrow[r, "\partial"] & {}
\end{tikzcd}$$

isomorphisme par le lemme des cinq

exercice Le diagramme commute

• $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots$, $\quad M^n = \bigcup_{\alpha \geq 1} U_\alpha$, $\quad U_\alpha \subset M$ ouvert

Si le thm est vrai pour chaque U_α, alors il est vrai pour M

$$
\begin{tikzcd}
H^i_{comp}(M) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "PD"] & \varinjlim_{\alpha} H^i_{comp}(U_\alpha) \arrow[d, "PD", "\cong"'] \\
H_{n-i}(M) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \varinjlim_{\alpha} H_{n-i}(U_\alpha)
\end{tikzcd}
$$

- Thm vrai pour $M \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

$$M = \bigcup_{k \geq 1} V_k \quad \text{pour certains } V_k = \underbrace{B(x_k, r_k)}_{\substack{\text{boule de rayon } r_k \\ \text{centrée en } x_k}}$$

1) thm vrai pour les convèxes (car il sont homeomorphes à $\mathbb{R}^n$);

2) supposons le thm vrai pour les unions de $k-1$ convexes

3) alors pour K convexes $U_1, \dots, U_K \subset \mathbb{R}^n$,

le thm est vrai pour

- $U_1 \cup \dots \cup U_{K-1}$

- U_K

- $U_K \cap (U_1 \cup \dots \cup U_{K-1}) = \overbrace{(\underbrace{U_K \cap U_1}_{\text{convexe}}) \cup \dots \cup (\underbrace{U_K \cap U_{K-1}}_{\text{convexe}})}^{\times K-1}$

donc le thm est vrai pour

$U_1 \cup \dots \cup U_K$

On conclut que le thm est vrai pour toute union finie

$$V_1 \cup .. \cup V_k \subset M$$

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_k H^i_{comp}(V_1 \cup . \cup V_k) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "PD", "\cong"'] & H^i_{comp}(M) \arrow[d, "PD"] \\
\varinjlim_k H_{n-1}(V_1 \cup . \cup V_k) \arrow[r, "\cong"] & H_{n-i}(M)
\end{tikzcd}$$

le diagramme implique que cette flèche est un isomorphisme

- M^n variété à base dénombrable

$$M = \bigcup_{k \geq 1} V_k$$ où chaque V_k est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ thm vrai pour toute union finie $V_1 \cup .. \cup V_k$ (par récurrence, comme dans le point précédent)

$\Rightarrow$ thm vrai pour M (en prenant la limite directe)

• Et si M n'est pas à base dénombrable ?

Lemme de Zorn !

$$\mathcal{U} = \left\{ U \subset M \text{ ouvert} \;\middle|\; PD : H^1_{comp}(U) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(U) \right\}$$

(partialement ordonnée par l'inclusion)

Soit $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tq $\forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{U}'$ on a $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$

$$W := \bigcup_{V \in \mathcal{U}'} V$$

$$\begin{tikzcd}
H^i_{comp}(W) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "PD"'] & \varinjlim_{V \in \mathcal{U}'} H^i_{comp}(V) \arrow[d, "PD", "\cong"'] \\
H_{n-i}(W) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \varinjlim_{V \in \mathcal{U}'} H_{n-i}(V)
\end{tikzcd}$$

(car $\mathcal{U}'$ est totalement ordonnée)

$\Rightarrow H^i_{comp}(W) \xrightarrow[\cong]{PD} H_{n-i}(W)$ est un isomorphisme

$\Rightarrow W \in \mathcal{U}$

Par le lemme de Zorn, $\exists\, U \in \mathcal{U}$ maximale

$\left(\text{i.e. } V \subseteq U \quad \forall\, V \in \mathcal{U}\right)$

Alors $U = M$

$\Bigg($ Sinon $\exists\, x \in M \setminus U$.

Soit $V \subset M$ voisinage ouvert de x t.q. $V \cong \mathbb{R}^n$

Mais $V, V \cap U \in \mathcal{U}$. Alors $V \cup U \in \mathcal{U}$, et $U \subsetneq V \cup U$

$\lightning \Bigg)$

$\square$

Pour les variéte R-orientée à bord M^n, la dualité de Poincaré est.

$$H^i_{comp}(M;R) \xrightarrow[\cong]{PD} H_{n-i}(M,\partial M;R)$$