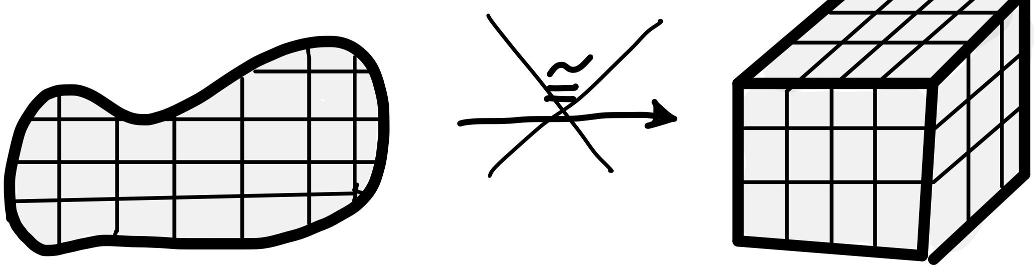
TOPOLOGIE ALGEBRIQUE.

outils et manipulations algebriques pour resoudre problèmes de topologie.

EXEMPLES.

- Thm de l'invariance du domaine

  Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ sont ouverts homeomorphes, alors $n = m$



- ## Thm du point fixe de Brouwer

$\forall \ \phi : \overline{B}^n \longrightarrow \overline{B}^n$ continue

$\exists \ x \in \overline{B}^n$ t.q. $\phi(x) = x$

- $\forall \ \phi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue

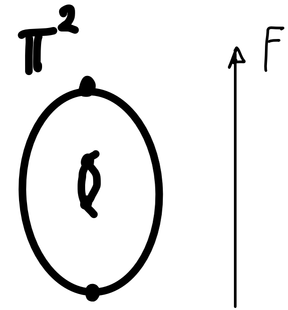
$\exists \ x \in S^n$ t.q. $\phi(x) = \phi(-x)$

(en chaque instant sur la Terre il y a deux points antipodaux ayant même température et même pression)

- ## Thm de Lusternik-Schnirelmann (cas particulier)

$\forall\ F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}\ \ C^\infty$

$$\# \,\mathrm{Crit}(F) \geqslant 3$$



$$\left(\text{où } \mathrm{Crit}(F) = \{ x \in \mathbb{T}^2 \mid dF(x) = 0 \} \right)$$

- - - - - - - - - -

RAPPELS DE TOPOLOGIE

- $f : A \to B$, $g : A \to B$ continues

$f \simeq g$ (f est **homotope** à g) quand

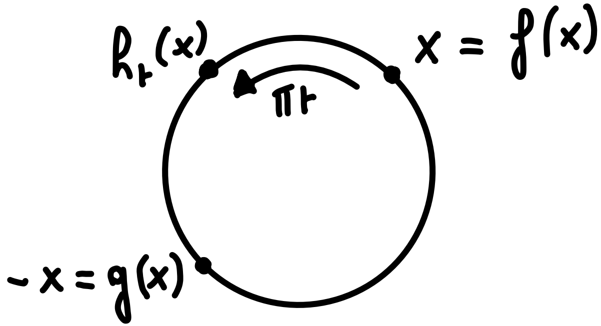
$\exists\, h : [0,1] \times A \to B$, $h(t,x) = h_t(x)$ continue

t.q. $h_0 = f$, $h_1 = g$

(h est dite **homotopie** entre f et g)

Exemple

$g, f : S^1 \longrightarrow S^1$, $f(x) = x$, $g(x) = -x$



$f \simeq g$

avec l'homotopie

$$h_t(x) = e^{i\pi t} x$$

⚠ $g, f : S^2 \longrightarrow S^2$
$f(x) = x$, $g(x) = -x$

$f \not\simeq g$

- $f : A \to B$ est une équivalence d'homotopie quand $\exists\, g : B \to A$ (inverse homotopique) t. q. $\begin{cases} f \circ g \simeq \mathrm{id} \\ g \circ f \simeq \mathrm{id} \end{cases}$

A et B sont homotopiquement équivalents

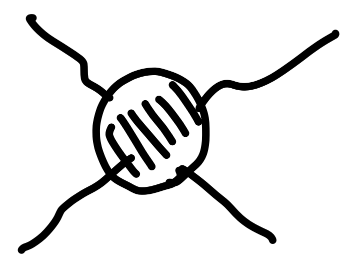
example

$f : \{0\} \to [0,1]$, $f(0) = 0$

$g : [0,1] \to \{0\}$, $g(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0,1]$

$g \circ f = id$, $h_t : [0,1] \to [0,1]$, $h_t(x) = (1-t)x$, $h_0 = id$, $h_1 = f \circ g$

Um espace topolog est **contractil** quand il est homot eq à $\{x\}$



ex $S_{sph} \subset \mathbb{H}_{hilb\ \infty}$ est contractible

NOTATION.

- $f \cdot (A,B) \longrightarrow (C,D)$

veut dire.
$$\begin{cases} f : A \longrightarrow C \\ B \subset A, \quad D \subset C \\ f(B) \subset D \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} h \cdot [0,1] \times A \to C \\ h(t,x) = h_t(x) \\ h_t(B) \subset D \\ \quad \forall t \in [0,1] \end{array}}$$

- $f, g \cdot (A,B) \longrightarrow (C,D)$

$f \simeq g$ quand $\exists$ homotopie $h_t \cdot (A,B) \longrightarrow (C,D)$, $t \in [0,1]$

$h_0 = f$, $h_1 = g$

$$[(A,B),(C,D)] = \frac{\{\text{applications continues } f : (A,B) \to (C,D)\}}{\text{homotopie}}$$

i.e. $[f] = [g]$ ssi $f \simeq g$

$$[A,B] = [(A,\emptyset),(B,\emptyset)]$$

INVARIANTS TOPOLOGIQUES

X espace topologique $\rightsquigarrow I(X)$ qui peut etre

- un entier
- un groupe
- un anneau
- etc

avec la propriété suivante :

$$X \underset{\text{homeomorphisme}}{\simeq} Y \implies I(X) \underset{\text{isomorphisme}}{\simeq} I(Y)$$

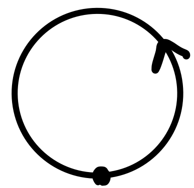
homeomorphisme
(souvent, même equivalence d'homotopie)

isomorphisme

GROUPE FONDAMENTAL

X espace topologique, $x_0 \in X$

$$S^1 = \frac{[0,1]}{\{0,1\}}$$



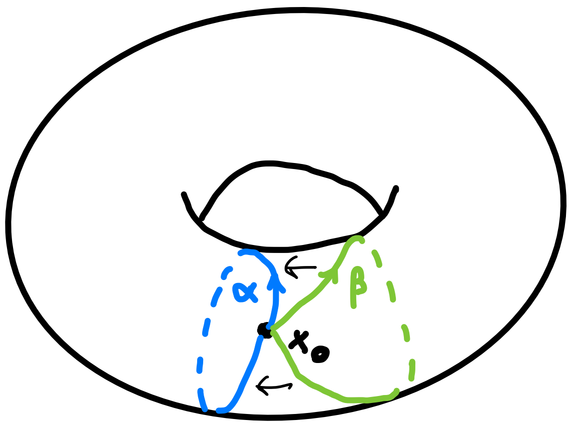
Le groupe fondamentale de (X, x_0) est

$$\pi_1(X, x_0) := [(S^1, 0), (X, x_0)]$$

$$\pi_1(X, x_0) = [(S^1, 0), (X, x_0)]$$

exemple

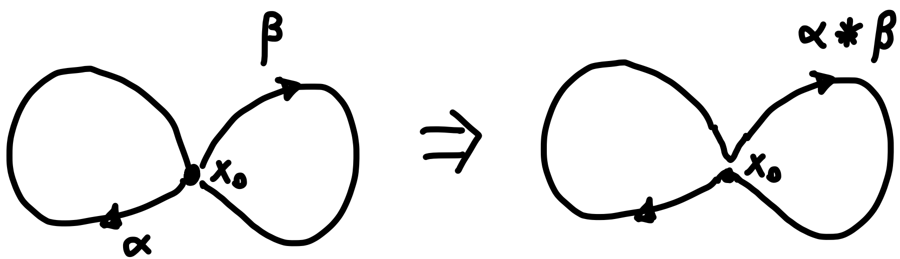
$$X = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$$



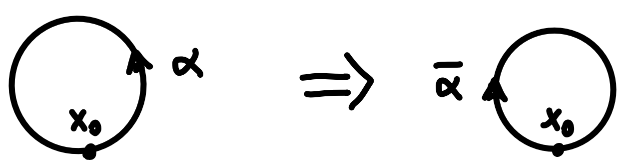
$$[\alpha] = [\beta] \quad \text{in } \pi_1(X, x_0)$$

$\pi_1(X, x_0)$ est un groupe avec multiplication

$$[\alpha]\cdot[\beta] = [\alpha * \beta] \qquad \alpha * \beta\,(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ \beta(2t-1), & t \in [\tfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



et inverse $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$, où $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$



L'élément neutre $1 \in \pi_1(X, x_0)$ est représenté par le lacet constant x_0.

$$1 = [x_0]$$

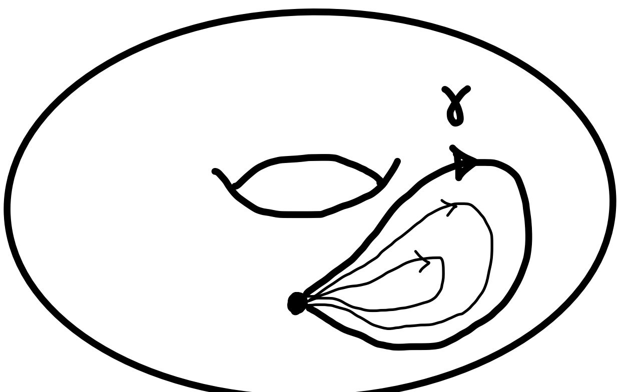
Rmq $[\gamma] = 1$ ssi γ est contractile

i.e $\exists\, h_t : (S^1, 0) \to (X, x_0)$

tq $h_0 = \gamma$

$h_1 \equiv x_0$

$(h_t(x_0) = x_0 \quad \forall t)$



exercice

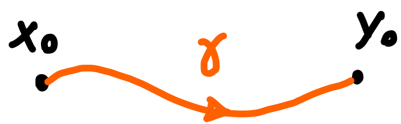
$\pi_1(X)$ est bien un groupe

(Il faut verifier :

- (associativité) $\quad ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$

- $[\alpha]^{-1} * [\alpha] = [\alpha] * [\alpha^{-1}] = 1$)

Si X est connexe par arcs, alors $\pi_1(X, x_0)$ est independent de x_0.



on fixe un tel $\gamma : [0,1] \to X$

$\gamma(0) = x_0, \quad \gamma(1) = y_0$

$$f_\gamma : \pi_1(X, y_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0) \quad \text{isomorphisme}$$

$$[\alpha] \longmapsto [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}]$$

<u>Preuve</u> • $f_\gamma([\alpha][\beta]) = [\gamma * \alpha * \beta * \bar{\gamma}]$

$$= [\gamma * \alpha * \underbrace{\bar{\gamma} * \gamma}_{\text{contractile}} * \beta * \bar{\gamma}] = f_\gamma[\alpha] \; f_\gamma[\beta]$$

- $f_\gamma^{-1} = f_{\bar{\gamma}}$.

$$f_{\bar{\gamma}} \circ f_\gamma [\alpha] = [\bar{\gamma} * \gamma * \alpha * \bar{\gamma} * \gamma]$$
$$= [\bar{\gamma} * \gamma] \, [\alpha] \, [\bar{\gamma} * \gamma] = [\alpha]$$

$$f_\gamma \circ f_{\bar{\gamma}} [\beta] = \dots = [\beta]$$

$\square$

X est **SIMPLEMENT CONNEXE** quand il est connexe par arcs et $\pi_1(X) = \{1\}$

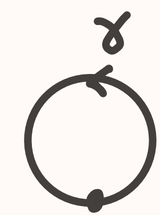
exemples

- $X = B^n$ boule de dim. n
- $X = S^n$ $n > 1$ (exercice)

Thm

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1) &\xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \\ \gamma &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

où $\gamma(t) = t$



$f \quad (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ continue

f induit un homomorphisme

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

$$[\gamma] \longmapsto [f \circ \gamma]$$

Prop $\quad f_0, f_1 : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ continues

Si $\quad f_0 \simeq f_1 \quad$ alors $\quad f_{0*} = f_{1*}$

homotope

Propriétés

- $\mathrm{id} : X \longrightarrow X \Rightarrow \mathrm{id}_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$

  $x \longmapsto x \qquad\qquad [\gamma] \longmapsto [\gamma]$

  donc $\forall f \simeq \mathrm{id}$ (avec homotopie qui fixe x_0)

  on a $f_* = \mathrm{id}_*$

- $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$

  $$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Z)$$

$A \subset X$

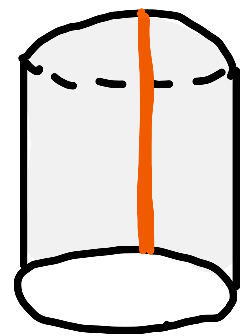
$r : X \to A$ continue, telle que $r|_A = \mathrm{id}$

est dite RÉTRACTION

exemple

$X = S^1 \times [0,1]$

$A = \{0\} \times [0,1]$



$r : X \to A$, $r(t,s) = (0,s)$

Une homotopie $r_t : X \to X$ telle que
$t \in [0,1]$

- $r_0 = id$
- $r_t|_A = id \quad \forall t \in [0,1]$
- $r_1(X) = A$ (i.e. $r_1 : X \to A$ est une retraction)

est dite RÉTRACTION PAR DÉFORMATION de X sur A

exemple $r_t \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$x \longmapsto \frac{x}{1-t+t\|x\|}$$

$r_1 : \mathbb{R}^n \setminus 0 \longrightarrow S^{n-1}$

Rmq Si r_t est une rétraction par déf. de X sur A, alors l'inclusion

$$i : A \hookrightarrow X$$

est une equivalence d'homotopie

Donc $i_* = (r_1)_*^{-1} : \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$

isomorphisme

$$(r_1)_* = (r_t)_* \quad \forall t \in [0,1]$$

Prop S'il existe une retraction $r: X \to A$, alors l'inclusion $i: A \hookrightarrow X$ induit un homom INJECTIF $i_*: \pi_1(A) \hookrightarrow \pi_1(X)$ et r induit un homom SURJECTIF $r_*: \pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1(A)$

Preuve $r \circ i = id \Rightarrow id_* = r_* \circ i_*$

(choisir $x_0 \in A$) $\square$

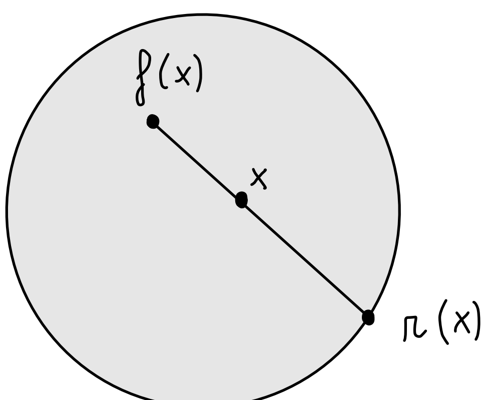
APPLICATIONS

Thm (Brower, dim 2)

Toute $f : \bar{B}^2 \circlearrowleft$ continue a un point fixe

(boule fermée) $\quad\quad (x \in \bar{B}^2,\ f(x) = x)$

Preuve Par l'absurde $f(x) \neq x \ \forall x \in \bar{B}^2$



On construit une retraction

$$r \ \bar{B}^2 \longrightarrow S^1 = \partial \bar{B}^2$$

Alors $r_* : \underset{\substack{\| \\ 1}}{\pi_1(\bar{B}^2)} \twoheadrightarrow \underset{\substack{\| \\ \mathbb{Z}}}{\pi_1(S^1)}$ surj $\lightning$ $\square$

Thm $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ avec $n \neq 2$

Preuve • Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ homeo, $n \geq 2$

Alors

$$\begin{array}{ccc} f_* : \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus 0) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus f(0)) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \pi_1(S^1) & & \pi_1(S^{n-1}) \\ \wr\wr & & \\ \mathbb{Z} & & \end{array}$$

$$\Longrightarrow \pi_1(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow n = 2$$

• $\nexists f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homeo

$\mathbb{R}^2 \setminus 0$ connexe

$\mathbb{R} \setminus 0$ pas connexe $\square$

Le groupe fondamental ne permet pas toujours de "distinguer" des espaces en grande dimension

exemple

$$\mathbb{Z} = \pi_1(S^1) \cong \pi_1(S^1 \times S^2), \quad \underset{\substack{\|\\ 1}}{}\ \pi_1(B^n) \cong \pi_1(S^n) \quad \forall n \geq 2$$

mais

$$S^1 \not\simeq S^1 \times S^2$$
$$B^n \not\simeq S^n$$

(pas homotopiquement équivalents)

Généralisation assez naturelle du $\pi_1(X)$

GROUPES D'HOMOTOPIE SUPÉRIEURS

$$\pi_n(X, x_0) := \left[(B^n, \partial B^n), (X, x_0) \right]$$

$n \geq 2$

B^n = boule fermée en dim n

$\pi_0(X)$ = famille des composantes connexes par arcs de X

Les groupes d'homotopie sont des invariants extrêmement fins (on precisera cette affirmation)

⚠ On ne sait pas les calculer !

<u>**ex.**</u> On sait $\pi_d(S^n) \cong 1, \quad 1 \leq d < n$

$$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

Mais $\pi_d(S^n) \cong ?$
$d > n$

On introduit donc un invariant qui est moins simple à définir, mais que l'on sait calculer avec des outils algébriques.

HOMOLOGIE

SIMPLEXES STANDARD

$\mathbb{R}^0 = \{0\}$, $\qquad \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{e_0}, \quad \underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{base standard de } \mathbb{R}^n}$$

$$\left(\begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0, \dots) \\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots) \\ e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots) \\ \vdots \end{array} \right)$$

n-SIMPLEXE STANDARD

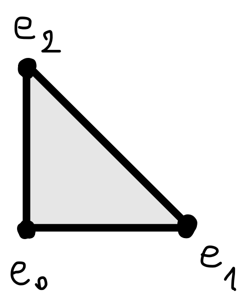
$$\Delta^n = \left\{ t_1 e_1 + \quad + t_n e_n \;\middle|\; \begin{array}{l} t_i \geq 0 \quad \forall i \\ t_1 + \dots + t_n \leq 1 \end{array} \right\}$$

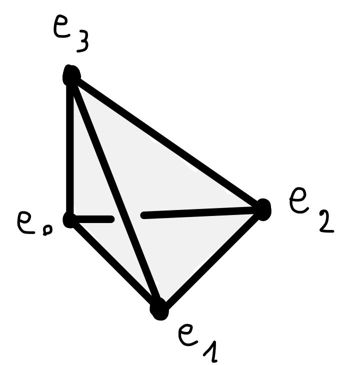
$t_0 e_0$

$t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$

$\Delta^0 =$ 

$\Delta^1 =$ 

$\Delta^2 =$ 

$\Delta^3 =$ 

Notation

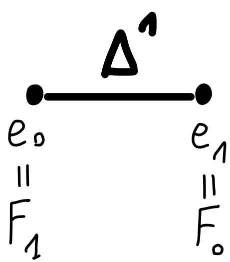
$$\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n]$$

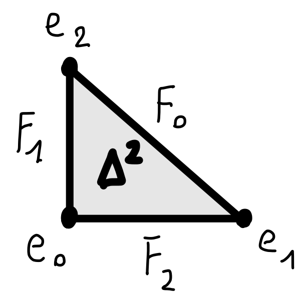
enveloppe convexe ordonné de $e_0, \; , e_n$

$i \in \{0, 1, \dots, n\}$

i-ème FACE de Δ^n

$$F_i = [e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n] \subset \partial \Delta^n$$





$\Delta^1 \equiv F_1$

$[e_0, e_1]$ $\quad$ $[e_0, e_2]$

$\Delta^1 \equiv F_0$

$[e_0, e_1]$ $\quad$ $[e_1, e_2]$

Rmq On identifie toujours $F_i \subset \Delta^n$ avec Δ^{n-1}