Le groupe fondamental ne permet pas toujours de "distinguer" des espaces en grande dimension

<u>**exemple**</u>

$$\mathbb{Z} = \pi_1(S^1) \cong \pi_1(S^1 \times S^2), \quad \underset{1}{\overset{\shortparallel}{\pi_1(B^n)}} \cong \pi_1(S^n) \quad \forall n \geq 2$$

mais

$$S^1 \not\simeq S^1 \times S^2$$

$$B^n \not\simeq S^n$$

(pas homotopiquement équivalents)

Généralisation assez naturelle du $\pi_1(X)$

GROUPES D'HOMOTOPIE SUPÉRIEURS

$$\pi_n(X, x_0) := \left[(B^n, \partial B^n), (X, x_0) \right]$$

$n \geq 2$

B^n = boule fermée en dim n

$\pi_0(X)$ = famille des composantes connexes par arcs de X

Les groupes d'homotopie sont des invariants extrêmement fins (on precisera cette affirmation)

⚠ On ne sait pas les calculer !

ex. On sait $\pi_d(S^n) \cong 1, \quad 1 \leq d < n$

$\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$

Mais $\boxed{\pi_d(S^n) \cong ? \quad d > n}$

On introduit donc un invariant qui est moins simple à définir, mais que l'on sait calculer avec des outils algébriques.

HOMOLOGIE

SIMPLEXES STANDARD

$\mathbb{R}^0 = \{0\}$, $\quad \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{matrix} e_0 \\ \shortparallel \\ 0 \end{matrix}, \quad \underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{base standard de } \mathbb{R}^n}$$

$$\left(\begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0, \dots) \\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots) \\ e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots) \\ \vdots \end{array} \right)$$

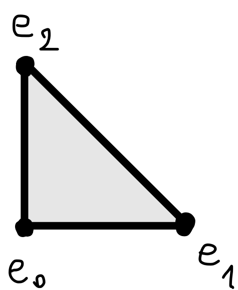
n-SIMPLEXE STANDARD $\quad \Delta^n = \left\{ t_1 e_1 + \quad + t_n e_n \;\middle|\; \begin{array}{l} t_i \geq 0 \quad \forall i \\ t_1 + \dots + t_n \leq 1 \end{array} \right\}$

$t_0 e_0 \qquad\qquad t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$

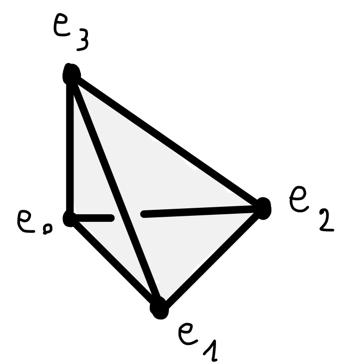
$\Delta^0 =$

$\Delta^1 =$

$\Delta^2 =$



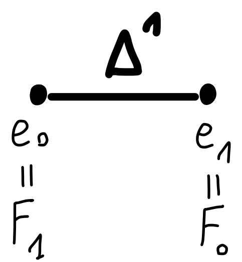
$\Delta^3 =$

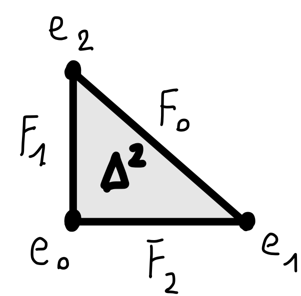


Notation $\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n]$ enveloppe convexe ordonné de $e_0, \ , e_n$

$i \in \{0, 1, .., n\}$

i-ème FACE de Δ^n $\quad F_i = [e_0, .., e_{i-1}, e_{i+1}, .., e_n] \subset \partial\Delta^n$





$\underset{[e_0, e_1]}{\Delta^1} \equiv \underset{[e_0, e_2]}{F_1}$

$\underset{[e_0, e_1]}{\Delta^1} \equiv \underset{[e_1, e_2]}{F_0}$

Rmq On identifie toujours $F_i \subset \Delta^n$ avec Δ^{n-1}

X espace topologique

n-SIMPLEXE SINGULIER $\quad \sigma \; \Delta^n \longrightarrow X$ continue

$C_n(X)$ = groupe abelien libre de base l'ensemble des n-simplexes singuliers de X

Un element de $C_n(X)$ s'appelle une **n-CHAINE SINGULIÈRE**, et s'écrit comme une somme finie

$$\sigma = \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \dots + \lambda_k \sigma_k \in C_n(X)$$

où $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, σ_i n-simplexe singulier

Rmq $C_n(X)$ est un invariant topologique, mais il est un groupe enorme, et impossible à calculer

$$\lambda \sigma + \mu \sigma = (\lambda + \mu) \sigma$$

$\sigma \quad \Delta^n \to X$

$F_i \equiv \Delta^{n-1}$

$[e_0 \ldots \cancel{e_i} \ldots e_n] \equiv [e_0 \ldots e_{n-1}]$

BORDE $\quad \partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \underbrace{\sigma|_{F_i}}_{(n-1)\text{-simplèxe singulier}} \in C_{n-1}(X)$

cette opération s'étend à un homomorphisme

$$\partial_n \quad C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

$$\lambda_1\sigma_1 + \ldots + \lambda_K\sigma_K \longmapsto \lambda_1 \partial_n \sigma_1 + \ldots + \lambda_K \partial_n \sigma_K$$

$\lambda_i \in \mathbb{Z}$, σ_i simp sing

Prop $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$

Rmq $\partial_0 = 0$

$\partial_K = 0 \quad \forall K < 0$

Preuve Il suffit de vérifier la proposition sur un n-simplexe singulier σ

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n \sigma = \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \sigma|_{[e_0 \ldots \cancel{e_j} \ldots \cancel{e_i} \ldots e_n]}$$

$$+ \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma|_{[e_0 \ldots \cancel{e_i} \ldots \cancel{e_j} \ldots e_n]}$$

$$= 0$$

$\square$

COMPLEXE DE CHAÎNES

$$\xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \cdot \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

n-ème GROUPE D'HOMOLOGIE SINGULIER

$$H_n(X) = \frac{\operatorname{Ker} \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$

Terminologie :

- $\sigma \in C_n(X)$ tel que $\partial_n \sigma = 0$ est dit n-CYCLE SINGULIER

- $\partial_{n+1} \sigma \in C_n(X)$ est dit n-BORDE SINGULIER

" Homologie = cycles modulo bordes "

Rmq

Si $X = \coprod_\alpha X_\alpha$,

où $X_\alpha \subset X$ est composante connexe par arcs

alors $H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$

$\left(\text{car} \quad C_n(X) = \bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha)\right)$

AUGMENTATION $\varepsilon \quad C_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$

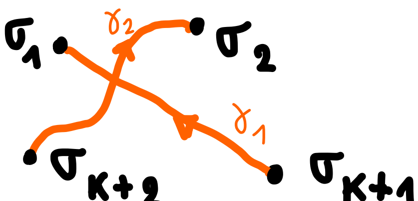
$$\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \underbrace{\sigma_i}_{\substack{0\text{-simp} \\ \text{sing.}}} \longmapsto \sum_i \lambda_i$$

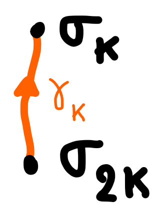
Prop Si X est connexe par arcs, alors

$\operatorname{Ker} \varepsilon = \operatorname{Im} \partial_1$

Preuve • $\sigma \in \operatorname{Ker} \varepsilon$ ssi $\sigma = \sigma_1 + .. + \sigma_K - \sigma_{K+1} - \dots - \sigma_{2K}$

où σ_i sont 0-simp sing





$\gamma = \gamma_1 + \,.\, + \gamma_K$

$\partial_1 \gamma = \sigma$

- $\gamma = \lambda_1 \gamma_1 + \ldots + \lambda_k \gamma_k \in C_1(X)$

où γ_1 est 1-simp sing

$$\partial_1 \gamma_i = \gamma_i|_{F_0} - \gamma_i|_{F_1}$$

$$\varepsilon(\partial_1 \gamma_i) = 1 - 1 = 0$$

$$\varepsilon(\partial_1 \gamma) = \sum_i \lambda_i \, \varepsilon(\partial_1 \gamma_i) = 0$$

$\square$

Prop Si $X = \coprod_\alpha X_\alpha$, où $X_\alpha \subset X$ comp connexe par arcs

alors $H_0(X) \cong \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$

Preuve Il suffit de prouver le thm pour $X \neq \emptyset$ connexe par arcs

$$H_0(X) = \frac{C_0(X)}{\operatorname{Im} \partial_1} = \frac{C_0(X)}{\operatorname{Ker} \varepsilon} \cong \operatorname{Im} \varepsilon = \mathbb{Z} \qquad \square$$

HOMOLOGIE SINGULIÈRE REDUITE

(si $X \neq \emptyset$)

$$\tilde{H}_0(X) = \frac{\operatorname{Ker} \varepsilon}{\operatorname{Im} \partial_1}$$

(bien définie car $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$)

$$\tilde{H}_n(X) := H_n(X) \quad \forall n > 0$$

Rmq $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ si $X \neq \emptyset$

Preuve ε induit $\varepsilon_* : H_0(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ surjectif

avec $\operatorname{Ker} \varepsilon_* \cong \tilde{H}_0(X)$ $\square$

Prop $H_n(\{x\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$

Preuve

$C_n(\{x\}) = \langle \sigma_n \rangle \cong \mathbb{Z}$, où $\sigma_n : \Delta^n \longrightarrow \{x\}$

$$\partial_n \sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \text{ ou } n \text{ impair} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n>0 \text{ et } n \text{ pair} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{0} \underset{\mathbb{Z}}{\overset{}{C_6}} \xrightarrow{\cong} C_5 \xrightarrow{0} C_4 \xrightarrow{\cong} C_3 \xrightarrow{0} C_2 \xrightarrow{\cong} C_1 \xrightarrow{0} C_0 \xrightarrow{0} 0$$

$$C_6 = C_5 = C_4 = C_3 = C_2 = C_1 = C_0 = \mathbb{Z}$$

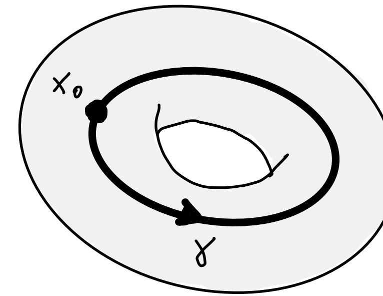
$\square$

1er GROUPE D'HOMOLOGIE

$$H_1(X) \quad \text{vs} \quad \pi_1(X, x_0)$$

Rmq $\pi_1(X, x_0)$ n'est pas forcement abelien. Cela est essentiellement la seule difference entre $H_1(X)$ et $\pi_1(X, x_0)$ quand X est connexe par arcs

- $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$



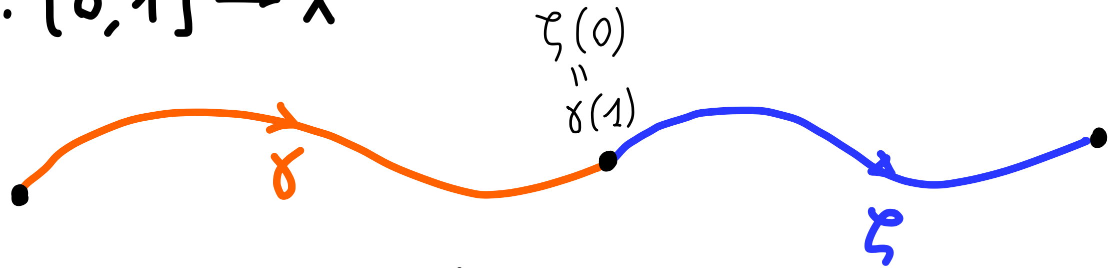
$\gamma \quad [0,1] \to X \quad$ tq $\quad \gamma(0) = \gamma(1) = x_0$

$\Rightarrow$ γ est un 1-chaîne

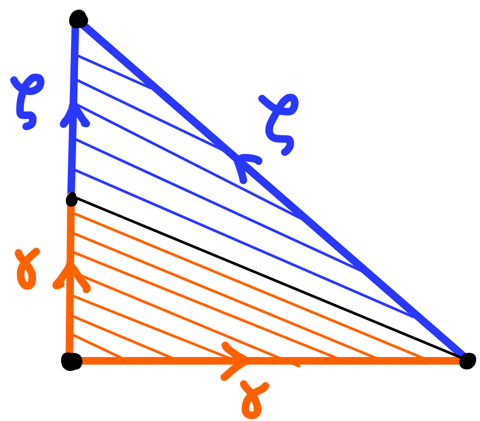
$\partial_1 \gamma = \gamma(1) - \gamma(0) = 0$

$\Rightarrow$ γ est même un 1-cycle

- $\gamma : [0,1] \to X$, $\zeta : [0,1] \to X$ t.q. $\gamma(1) = \zeta(0)$



$$\Rightarrow \exists\, \sigma \in C_2(X) \text{ s.t. } \partial_2 \sigma = \gamma + \zeta - \gamma * \zeta$$

$\sigma =$ 

(σ constant le long de chaque ligne diagonale)

$\Rightarrow \forall \ [\gamma], [\zeta] \in \pi_1(X, x_0)$

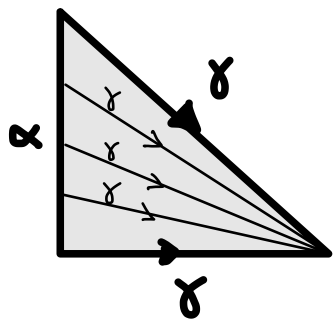
on a $\quad [\gamma * \zeta] = [\gamma] + [\zeta] \in H_1(X)$

- Toute $\gamma : [0,1] \to X$ constant est un bord

$\gamma \equiv y \qquad\qquad \sigma : \Delta^2 \to X, \ \sigma \equiv y$

$$\partial_2 \sigma = y - y + y = y = \gamma$$

- $\forall\ \gamma\ [0,1] \to X \qquad \exists\ \sigma \in C_2(X)$ t.q. $\partial_2 \sigma = \gamma + \bar{\gamma}$

$\sigma_1 =$ 

$$\alpha \equiv \gamma(0) = \partial_2 \sigma_2$$

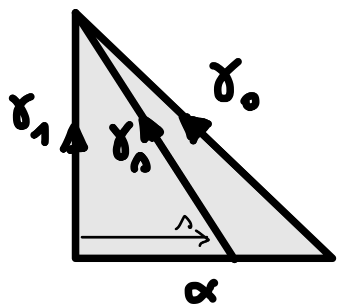
$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \qquad \partial\sigma = \partial\sigma_1 + \partial\sigma_2 = \bar{\gamma} - \alpha + \gamma + \alpha$$

$$= \gamma + \bar{\gamma}$$

• Pour toute homotopie $\gamma_s \quad [0,1] \longrightarrow X$ tq

$$\gamma_s(0) = y \qquad \forall s \in [0,1]$$
$$\gamma_s(1) = z$$

$$\exists\, \sigma \in C_2(X) \quad \text{tq} \quad \partial_2 \sigma = \gamma_0 - \gamma_1$$

$\sigma_1 =$ 

$$\alpha \equiv y = \partial_2 \sigma_2$$

$$\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$$

$$\partial \sigma = \gamma_0 - \gamma_1 + \alpha - \alpha$$
$$= \gamma_0 - \gamma_1$$

HOMOMORPHISME DE HUREWICZ

$$h \quad \pi_1(X,x_0) \longrightarrow H_1(X)$$
$$[\sigma] \longmapsto [\sigma]$$

Il est bien défini.

$[\gamma] = [\xi]$ dans $\pi_1(X,x_0) \Rightarrow [\gamma] = [\xi]$ dans $H_1(X)$

Il est un homomorphisme.

$[\gamma], [\xi] \in \pi_1(X,x_0) \Longrightarrow [\gamma * \xi] = [\gamma] + [\xi]$ dans $H_1(X)$

.

Comme $H_1(X)$ est abélien, h passe au quotient

$$h_*: \frac{\pi_1(X,x_0)}{[\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)]} \longrightarrow H_1(X)$$

$[G,G] = \{[g,h] \mid g,h \in G\}$

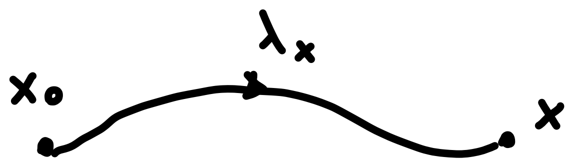
$[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$

$\pi_1(X,x_0)_{ab} = \pi_1/[\pi_1,\pi_1]$ est l'abélienisé de π_1)

Thm (Hurewicz) Si X est connexe par arcs alors h_* est un isomorphisme

Preuve

- $\forall x \in X$ on fixe un chemin $\lambda_x \; [0,1] \to X$



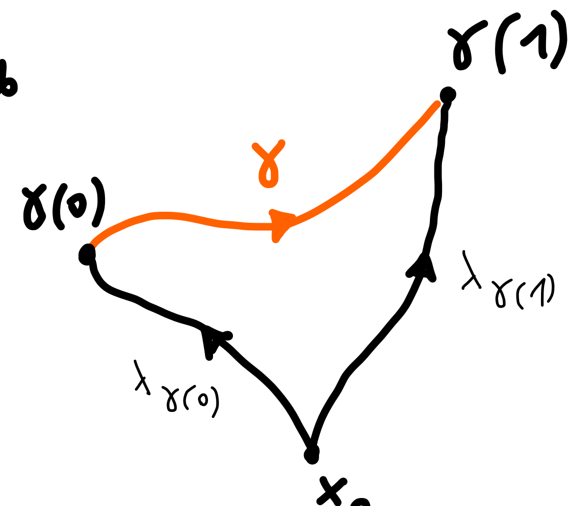
$\lambda_x(0) = x_0$

$\lambda_x(1) = x$

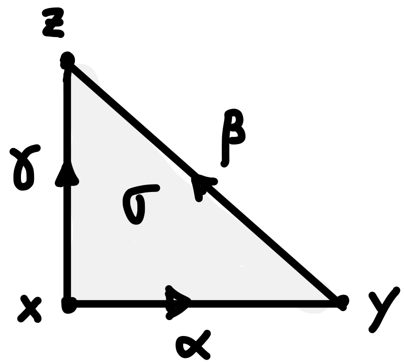
- $\psi \quad C_1(X) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)_{ab}$

$\psi(\gamma) = [\lambda_{\gamma(0)} * \gamma * \overline{\lambda_{\gamma(1)}}]$

$\forall \gamma . [0,1] \to X$



- $\psi(\partial_2 \sigma) = 1 \quad \forall \sigma \in C_2(X)$



$$\partial_2 \sigma = \beta - \gamma + \alpha$$

$$\psi(\beta - \gamma + \alpha) = [\lambda_y * \beta * \bar{\lambda}_z] - [\lambda_x * \gamma * \bar{\lambda}_z] + [\lambda_x * \alpha * \bar{\lambda}_y]$$

$$= [\lambda_y * \beta * \underbrace{\bar{\lambda}_z * \lambda_z}_{} * \bar{\gamma} * \underbrace{\bar{\lambda}_x * \lambda_x}_{} * \alpha * \bar{\lambda}_y]$$

$$= [\lambda_y * \underbrace{\beta * \bar{\gamma} * \alpha}_{} * \bar{\lambda}_y] = [\lambda_y * \bar{\lambda}_y] = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_* \quad H_1(X) \longrightarrow \pi_1(X,x_0)_{ab}}$$

- $\boxed{\psi_* \circ h_* = \mathrm{id}}$

$$\psi_* \circ h_* [\gamma] = [\lambda_{\gamma(0)} * \gamma * \overline{\lambda_{\gamma(0)}}]$$

$$= [\lambda_{\gamma(0)}] + [\overline{\lambda_{\gamma(0)}}] + [\gamma] = [\gamma]$$

- $h_* \circ \psi_* = id$

$[\sigma] \in H_1(X)$ $\quad \sigma = \sigma_1 + .. + \sigma_K$, où σ_i chemins

$x_i := \sigma_i(0)$,

$\partial_1 \sigma = 0 \Rightarrow \exists$ bijection $f : \{1, .., K\} \circlearrowleft$

t.q. $\quad \sigma_i(1) = x_{f(i)}$

$$\Rightarrow h_* \psi_* [\sigma] = [\lambda_{x_1} + \sigma_1 + \bar{\lambda}_{f(1)} + \ldots + \lambda_{x_K} + \sigma_K + \bar{\lambda}_{f(K)}]$$

$$= [\sigma] + [\lambda_1 + \bar{\lambda}_1 + .. + \lambda_K + \bar{\lambda}_K] = [\sigma]$$

$\square$

exemples

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \cong H_1(S^1)$$

$$\pi_1(\mathbb{T}^n) \cong \pi_1(S^1) \oplus \dots \oplus \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}^n \cong H_1(\mathbb{T}^n)$$