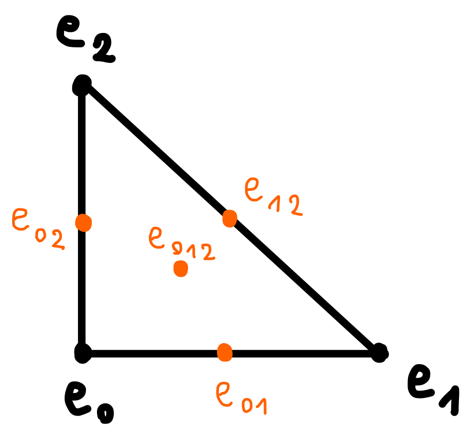
THÉORÈME DES PETITES CHAÎNES

$$\underset{\subset \mathbb{R}^n}{\Delta^n} = [\underset{\overset{\parallel}{0}}{e_0}, \dots, e_n]$$ simplexe standard

$$e_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k}\left(e_{i_1} + \dots + e_{i_k}\right)$$ barycentre de la face $\underbrace{[e_{i_1}, \dots, e_{i_k}]}_{\equiv \Delta^{k-1}}$



on introduit

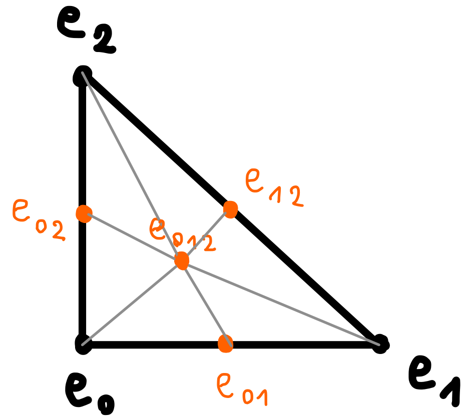
homomorphisme de subdivision $S_n \quad C_n(X) \longrightarrow C_n(X)$

- $\underline{n=0}$ $\quad S_0 := \mathrm{id}$

- $\underline{n=1}$

$$S_1\sigma := \sigma|_{[e_0,e_{01}]} - \sigma|_{[e_1,e_{01}]} \qquad \forall\, \sigma : \Delta^1 \to X$$

- $\underline{n = 2}$



$$\sigma : \Delta^2 \to X$$

$$\begin{aligned} S_2\sigma = {} & \sigma|_{[e_0, e_{01}, e_{012}]} - \sigma|_{[e_1, e_{01}, e_{012}]} \\ & + \sigma|_{[e_1, e_{12}, e_{012}]} - \sigma|_{[e_2, e_{12}, e_{012}]} \\ & + \sigma|_{[e_2, e_{02}, e_{012}]} - \sigma|_{[e_0, e_{02}, e_{012}]} \end{aligned}$$

- $S_n \sigma = \sum_{i=\{i_0,\dots,i_n\}} (-1)^i \sigma|_{[e_{i_0}, e_{i_0 i_1}, e_{i_0 i_1 i_2}, \dots, e_{i_0 \dots i_n}]}$

$\sigma : \Delta^n \to X$

permutation de $0, \dots, n$

Propriétés

- $S_n \circ \partial_{n+1} = \partial_{n+1} \circ S_{n+1}$

$\Rightarrow S_n : H_n(X) \to H_n(X)$

- $\forall f \; X \to Y$ on a $S_n \circ f_n = f_n \circ S_n$

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "S_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_n(X) \arrow[d, "f_n"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "S_n"] & C_n(Y) \end{tikzcd}$$

($f_n : C_n(X) \to C_n(Y)$ induit par f)

Lemme

$\exists$ homotopie des chaînes $T_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$

tq. • $\partial_{n+1} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n = id_n - S_n$

• $\forall f : X \to Y$ on a $f_{n+1} \circ T_n = T_n \circ f_n$

En particulier S_n induit l'isomorphisme

$id_* = S_* \quad H_n(X) \longrightarrow H_n(X)$

Preuve

- $T_{-1} = 0$, $T_0 = 0$ $\Longrightarrow$ $\partial_1 \circ T_0 - T_{-1} \circ \partial_0 = 0 = id_0 - S_0$

- Par induction : supposons $T_{-1}, T_0, \ldots, T_{n-1}$
  définis (satisfaisants le lemme)

- On considère d'abord $X = \Delta^n$
  $\iota = id : \Delta^n \to \Delta^n$ vu comme simplexe singulier
  $$(\iota \in C_n(\Delta^n))$$

• Par hypothèse

$$\partial_n \iota - S_{n-1}(\partial_n \iota) = \partial_n \circ T_{n-1}(\partial_n \iota) - T_{n-2} \circ \underbrace{\partial_{n-1}(\partial_n \iota)}_{0}$$

$$\Rightarrow \partial_n \big(\underbrace{\iota - S_{n-1}(\iota) - T_{n-1} \circ \partial_n \iota}_{\text{cycle}} \big) = 0$$

Comme $H_n(\Delta^n) = 0$, $\exists\, \mu \in C_{n+1}(\Delta^n)$ tq

$$\iota - S_{n-1}(\iota) - T_{n-1} \circ \partial_n \iota = \partial_{n+1} \mu$$

⚠ μ n'est pas unique

On pose. $T_n(\iota) := \mu$

- X espace topologique

$\sigma : \Delta^n \to X$ simplexe singulier

σ induit $\sigma_n : C_n(\Delta^n) \to C_n(X)$

Rmq

$\sigma = \sigma_n(\iota)$

$$T_n(\sigma) = \sigma_n \circ T_n(\iota)$$

$$\Rightarrow \quad T_{n-1} \circ \partial_n \sigma + \partial_{n+1} \circ T_n \sigma = \sigma_n\left(T_{n-1} \partial_n \iota + \partial_{n+1} T_n \iota\right)$$

$$= \sigma_n\left(\iota - S_n(\iota)\right) = \sigma - S_n(\sigma)$$

$$T_n \circ f_n = f_{n+1} \circ T_n \quad \forall f : X \to Y$$

$\square$

X espace topologique

$$\mathcal{U} = \{ U_\alpha \mid \alpha \in I \} \quad \text{t.q.} \quad U_\alpha \subset X, \quad X = \bigcup_\alpha \overbrace{U_\alpha^\circ}^{\text{intérieur de } U_\alpha}$$

$$C_n(\mathcal{U}) := \left\{ \sigma \in C_n(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma = \sigma_1 \pm \cdots \pm \sigma_k,\ k \geq 0, \\ \text{et } \sigma_i : \Delta^n \to U_{\alpha_i} \text{ pour} \\ \text{un certain } \alpha_i \in I \end{array} \right\}$$

$$C_n(\mathcal{U}) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(\mathcal{U})$$

sous-complexe des chaînes $\mathcal{U}$-petites

$$H_n(\mathcal{U}) = H_n(C_*(\mathcal{U}))$$

Thm (petites chaînes)
L'inclusion $C_n(U) \hookrightarrow C_n(X)$ induit un isomorphisme $H_n(U) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$

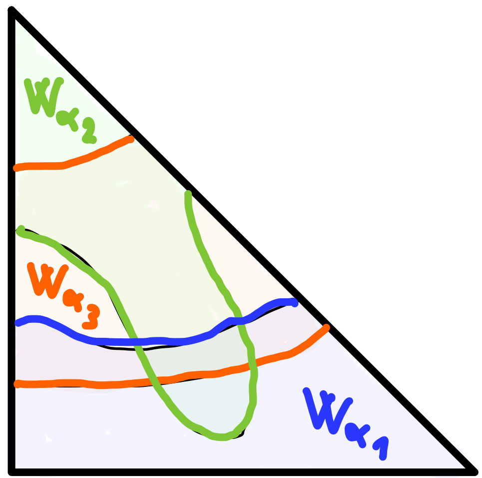
Preuve

- $\forall \sigma \in C_n(X) \quad \exists K \geq 0$ tq

$$S_n^K(\sigma) = \underbrace{S_n \circ \dots \circ S_n}_{\times K}(\sigma) \in C_n(U)$$

$\sigma \quad \Delta^n \to X$

$W_\alpha = \sigma^{-1}(U_\alpha^\circ)$ recouvrement ouvert de Δ^n



Δ^n espace métrique compact

$\delta > 0$ numéro de Lebesgue

$$\left(\begin{array}{l} \text{Tout } K \subset \Delta^n \text{ avec } \operatorname{diam}(K) < \delta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\sup\limits_{x,y \in K} \|x-y\|} \\ \text{est contenu dans } W_\alpha \text{ pour} \\ \text{un certain } \alpha \end{array} \right)$$

$\iota = \mathrm{id} \quad \Delta^n \to \Delta^n$

$S_n^k(\iota) = \iota_1 + \dots + \iota_{N^k}$ où $\iota_j \quad \Delta^n \to \Delta^n$

$$\mathrm{diam}(\iota_j(\Delta^n)) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \mathrm{diam}(\Delta^n)$$

Cela découle de l'enoncé suivant.

$\forall \; C = [z_0, \dots, z_n] \subset \mathbb{R}^n, \qquad C' = [z_{i_0}, z_{i_0 i_1}, \dots, z_{i_0 \dots i_n}]$

où $\quad z_{i_0 \dots i_k} = \frac{1}{k+1} \sum_j z_{i_j}$

$$\mathrm{diam}(C') \leq \frac{n}{n+1} \mathrm{diam}(C)$$

Preuve

$$C' = [\underset{\underset{x_0}{\parallel}}{z_{i_0}}, \underset{\underset{x_1}{\parallel}}{z_{i_0 i_1}}, \dots, \underset{\underset{x_m}{\parallel}}{z_{i_0 \dots i_m}}]$$

- $\forall x, y \in C'$ on a $x = \sum_i t_i x_i$, où $\sum_i t_i = 1$

$$\|x - y\| = \|\sum_i t_i (x_i - y)\| \leq \max_i \|x_i - y\|$$

- $\operatorname{diam} C' = \max_{i,j} \|x_i - x_j\|$ (par point précedent)
- $0 \leq a < b \leq m$

$$\|x_a - x_b\| = \|\frac{1}{a+1} \sum_{j=0}^{a} z_{i_j} - \frac{1}{b+1} \sum_{j=0}^{b} z_{i_j}\|$$

$$= \|\frac{b-a}{(a+1)(b+1)} \sum_{j=0}^{a} z_{i_j} - \frac{1}{b+1} \sum_{j=a+1}^{b} z_{i_j}\|$$

$$= \underbrace{\frac{b-a}{b+1}}_{\leq \frac{m}{m+1}} \Big\| \underbrace{\frac{1}{a+1} \sum_{j=0}^{a} z_{i_j}}_{\in C} - \underbrace{\frac{1}{b-a} \sum_{j=a+1}^{b} z_{i_j}}_{\in C} \Big\|$$

$$\leq \frac{m}{m+1} \operatorname{diam}(C) \qquad \square$$

il suffit de choisir K grand tq

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^K \cdot \operatorname{diam}(\Delta^n) < \delta$$

- $[\sigma] = [S_n \sigma] \in H_n(X)$ $\forall$ cycle $\sigma \in C_n(X)$

par le lemme précedent

- $\forall [\sigma] \in H_n(X)$ $\exists K > 0$ tq $S_n^K(\sigma) \in C_n(U)$

et $[\sigma] = [S_n^K(\sigma)]$

Donc $H_n(U) \twoheadrightarrow H_n(X)$ surjectif

- Si $[\sigma] \in H_n(U)$ et $[\sigma] = 0$ in $H_n(X)$

alors $\sigma = \partial_{n+1} \mu$ pour un certain $\mu \in C_{n+1}(X)$

$\exists\, k > 0$ tq. $S^k_{n+1}(\mu) \in C_{n+1}(U)$

$[\sigma] = [S^k_n(\sigma)]$ dans $H_n(U)$

$$S^k_n(\sigma) = S^k_n(\partial_{n+1}\mu) = \partial_{n+1}(S^k_{n+1}(\mu))$$

$\Rightarrow [\sigma] = 0$ dans $H_n(U)$

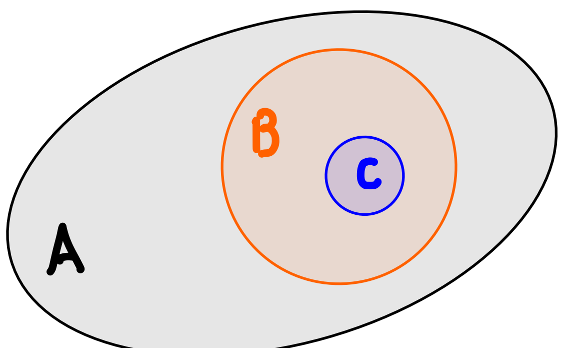
$\Rightarrow H_n(U) \hookrightarrow H_n(X)$ injectif $\square$

APPLICATIONS

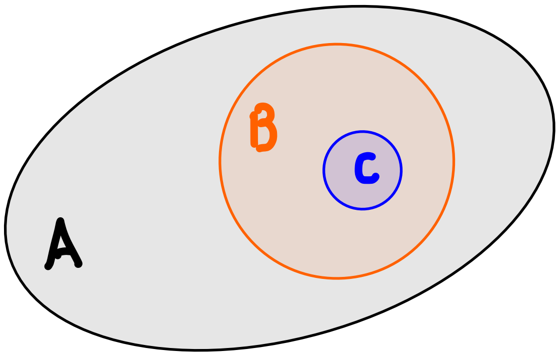
fermeture dans A

Thm (excision)

$\forall\, C \subset B \subset A$ tq $\bar{C} \subset B^\circ$, l'inclusion induit un isomorphisme $H_n(A \setminus C, B \setminus C) \xrightarrow{\cong} H_n(A, B)$ $\forall n$



Preuve



$$U = \{A\setminus C,\ B\}$$

$$(A\setminus C)^\circ \cup B^\circ = (A\setminus \overline{C}) \cup B^\circ = A$$

(Thm des petites chaînes)

$C_n(U) \hookrightarrow C_n(A)$

induit isomorphisme

$$H_n(U) \xrightarrow{\cong} H_n(A)$$

$$\frac{C_n(U)}{C_n(B)} \cong \frac{C_n(A\setminus C)}{C_n(B)\cap C_n(A\setminus C)} = \frac{C_n(A\setminus C)}{C_n(B\setminus C)}$$

suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n(B) \arrow[r] \arrow[d] & C_n(U) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \frac{C_n(A\setminus C)}{C_n(B\setminus C)} \arrow[r] \arrow[d, "i_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n(B) \arrow[r] & C_n(A) \arrow[r] & \frac{C_n(A)}{C_n(B)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(induit)

induisent les suites exactes longues

$$\begin{tikzcd}
H_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n(U) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n(A\setminus C, B\setminus C) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "i_*"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_{n-1}(U) \arrow[d, "\cong"] \\
H_n(B) \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r] & H_n(A,B) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{n-1}(B) \arrow[r] & H_{n-1}(A)
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \iota_* \, H_n(A\setminus C, B\setminus C) \to H_n(A,B)$

est un isomorphisme par le lemme des 5

$\square$

Lemme des 5

Pour toute morphismes des suites exactes

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & G_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & G_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & G_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & G_5 \arrow[d, "f_5"] \\ G_1' \arrow[r] & G_2' \arrow[r] & G_3' \arrow[r] & G_4' \arrow[r] & G_5' \end{tikzcd}$$

tq.

- G_i grp abelien $\forall i$
- f_i isomorphisme $\forall i \neq 3$

on a que f_3 est isomorphisme

Preuve "diagram chasing"

$$\begin{array}{ccccccccc}
G_1 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & G_4 & \longrightarrow & G_5 \\
\downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\
G_1' & \longrightarrow & G_2' & \longrightarrow & G_3' & \longrightarrow & G_4' & \longrightarrow & G_5'
\end{array}$$

$\square$

Thm (Mayer-Vietoris)

Si $A, B \subset X$ tq $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$, alors $\exists$ suite exacte longue

$$\xrightarrow{\partial_*} H_n(A \cap B) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{h_* - k_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{(i_*, j_*)}$$

où

$i : A \cap B \to A$, $j : A \cap B \to B$, $h : A \to X$, $k : B \to X$

sont inclusions

(Leopold Vietoris, 1891-2002)

Preuve

$U = \{A, B\}$, $C_n(U) = C_n(A) \oplus C_n(B)$

- Il suffit de montrer qu'on a une suite exacte courte.

$$0 \longrightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{(i_n, j_n)} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{h_n - K_n} C_n(U) \longrightarrow 0$$

injectif — surjectif

si $h_n(\alpha) - K_n(\beta) = 0$ alors $h_n(\alpha) = K_n(\beta)$

$\Longrightarrow$ α et β sont sommes des mêmes simplexes singuliers, donc $\alpha = i_n(\sigma)$ et $\beta = j_n(\sigma)$ pour un certain σ.

- La suite exacte longue induite (avec $H_n(U) \cong H_n(X)$) est bien la suite voulue $\square$

<u>Thm</u> (Mayer-Vietoris, version relative)

Si $\underset{C^\circ \cup D^\circ}{\underset{\parallel}{Y}} \subset \underset{A^\circ \cup B^\circ}{\underset{\parallel}{X}}$, $\quad C \subset A \cap Y \quad D \subset B \cap Y$

alors on a une suite exacte longue

$$\xrightarrow{\partial_*} H_n(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \xrightarrow{k_* - K_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

<u>Preuve</u> • $\mathcal{U} = \{A, B\} \quad \mathcal{V} = \{C, D\}$

$C_n(\mathcal{V}) \subset C_n(\mathcal{U})$

$$C_n(U,V) := \frac{C_n(U)}{C_n(V)}$$

suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C_n(V) \longrightarrow C_n(U) \longrightarrow C_n(U,V) \longrightarrow 0$$

induit suite exacte longue

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_*"] & H_n(V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n(U) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n(U,V) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_*"] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X,Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(par thm des petites chaînes)

$\Rightarrow$ $H_n(U,V) \xrightarrow{\cong} H_n(X,Y)$ (Thm petites chaînes rel)

- suite courte exacte

$$0 \longrightarrow C_n(A \cap B, C \cap D) \longrightarrow C_n(A, C) \oplus C_n(B, D) \longrightarrow C_n(U, V) \longrightarrow 0$$

induit la suite voulue

$\square$