⚠ $\xcancel{H^n(X;G) \cong \mathrm{Hom}(H_n(X);G)}$

exemple

$$0 \to \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{C_3}} \xrightarrow{0} \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{C_2}} \xrightarrow{2} \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{C_1}} \xrightarrow{0} \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{C_0}} \to 0 \quad \Rightarrow \quad H_n(C_*) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0,3 \\ \mathbb{Z}_2 & n=1 \\ 0 & \text{autr} \end{cases}$$

complexe duale

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(C_3,\mathbb{Z}) \xleftarrow{0} \mathrm{Hom}(C_2,\mathbb{Z}) \xleftarrow{2} \mathrm{Hom}(C_1,\mathbb{Z}) \xleftarrow{0} \mathrm{Hom}(C_0,\mathbb{Z}) \leftarrow 0$$

$$H^n(C_*) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0,3 \\ \mathbb{Z}_2, & n=2 \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

Thm des coefficients universels

$\forall A \subset X$ esp top
G grp abelien

$\exists$ suites exactes courtes

$$0 \to H_n(X,A) \otimes G \to H_n(X,A;G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X,A),G) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X,A),G) \to H^n(X,A;G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X,A),G) \to 0$$

Rmq $\mathrm{Tor}(H,G) = \underbrace{\mathrm{Ext}(H,G)}_{\text{si } H \text{ est de type fini}} = 0$ si $G = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Ce théorème est purement algébrique !

(encore un peu de) ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

Une **résolution libre** d'un groupe abelien H est une suite exacte

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} \underset{\substack{\parallel \\ F_{-1}}}{H} \to 0$$

où les F_i sont des groupe libres abelien

exemple

$$0 \to \mathrm{Ker}(f_0) \to \overset{\substack{F[g_1, .., g_n] \\ \parallel}}{F} \xrightarrow{\quad f_0 \quad} \overset{\substack{\langle h_1, .., h_n \rangle \\ \parallel}}{H} \to 0$$

$$g_i \longmapsto h_i$$

Lemme F_* résolution libre de H
F'_* résolution libre de H'

- Toute homomorphisme $\psi . H \to H'$ s'etend à un morphisme de chaînes $\psi_* . F_* \to F'_*$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\psi_0"] & H \arrow[r] \arrow[d, "\psi = \psi_{-1}"] & 0 \\
\arrow[r] & F'_1 \arrow[r, "f'_1"] & F'_0 \arrow[r, "f'_0"] & H' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

- Si $\tilde{\psi}_*$ est une autre extension de ψ, alors
$\tilde{\psi}_n - \psi_n = f'_{n+1} P_n + P_{n-1} f_n$, $P_* =$ homot de chaînes

Preuve

- Diagram chasing !

  $F_0 = F[\{g_i\}_{i\in I}]$ groupe libre avec générateurs

- on fixe $\psi_0(g_i) \in (f_0')^{-1}(\psi \circ f_0(g_i))$
- cela définit ψ_0
- on continue avec $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$

- ψ_*, ψ'_* deux extensions de ψ

construisons l'homotopie des chaînes

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] \arrow[dl, "P_1"'] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] \arrow[dl, "P_0"'] & H \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, "P_{-1}"'] & 0 \\
{} \arrow[r] & F_1' \arrow[r, "f_1'"] & F_0' \arrow[r, "f_0'"] & H' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

- $\forall$ générateur $g \in F_0$

on veut $\underbrace{(\psi_0 - \psi_0')(g)}_{g' \in \operatorname{Ker}(f_0')} = \underbrace{P_{-1}}_{:= 0} f_0(g) + f_1' \underbrace{P_0(g)}_{= g'' \in (f_1')^{-1}(g')}$

- puis $P_1, P_2, P_3, \ldots$

$\square$

rés libre $\xrightarrow{f_3} F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \longrightarrow 0$

G groupe abelien (coefficients); $A^* := \mathrm{Hom}(A, G)$

suite duale $\underbrace{0 \longrightarrow H^* \xrightarrow{f_0^*} F_0^* \xrightarrow{f_1^*} F_1^*}_{\text{exacte}} \xrightarrow{f_2^*} F_2^* \xrightarrow{f_3^*} \cdots$

Cor $\dfrac{\mathrm{Ker}(f_i^*)}{\mathrm{Im}(f_{i-1}^*)}$ est independant de F_*

plus précisement, si F_* et G_* sont deux resolutions libres de H, toute morphisme de chaînes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\psi_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\psi_0"] & H \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & G_2 \arrow[r, "g_2"] & G_1 \arrow[r, "g_1"] & G_0 \arrow[r, "g_0"] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induit le même isomorphisme

$$\frac{\operatorname{Ker} g_n^*}{\operatorname{Im} g_{n-1}^*} \xrightarrow[\cong]{\psi_{n-1}^*} \frac{\operatorname{Ker} f_n^*}{\operatorname{Im} f_{n-1}^*}$$

Preuve

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\psi_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\psi_0"] & H \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & G_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\phi_2"] & G_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\phi_1"] & G_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\phi_0"] & H \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\psi_2"] & F_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & F_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\psi_0"] & H \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & G_2 \arrow[r, "g_2"] & G_1 \arrow[r, "g_1"] & G_0 \arrow[r, "g_0"] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Lemme $\Rightarrow$ $\psi_n \circ \phi_n \sim id$, $\quad \phi_n \circ \psi_n \sim id$

homotopie de chaînes

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\Phi_n^*}_{\substack{\text{indépendent} \\ \text{du morphisme} \\ \text{de chaînes } \Phi_* \\ \text{(grace au lemme)}}} = (\Psi_n^*)^{-1} \cdot \quad \frac{\operatorname{Ker} g_{n+1}^*}{\operatorname{Im} g_n^*} \xrightarrow{\cong} \frac{\operatorname{Ker} f_{n+1}^*}{\operatorname{Im} f_n^*}$$

$\square$

Cor $\dfrac{\operatorname{Ker} f_{n+1}^*}{\operatorname{Im} f_n^*} = 0 \quad \forall n \neq 1$

Preuve $\exists$ résolution libre $0 \to F_1 \to F_0 \to H \to 0$. $\square$

résolution libre $\quad \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \longrightarrow 0$

suite duale $\quad 0 \longrightarrow H^* \xrightarrow{f_0^*} F_0^* \xrightarrow{f_1^*} F_1^* \xrightarrow{f_2^*} F_2^* \xrightarrow{f_3^*} \cdot$

$$F_1^* = \mathrm{Hom}(F_1, G)$$

$$\mathrm{Ext}(H,G) = \frac{\mathrm{Ker}\, f_2^*}{\mathrm{Im}\, f_1^*}$$

Rmq

- $\mathrm{Ext}(H \oplus H', G) \cong \mathrm{Ext}(H, G) \oplus \mathrm{Ext}(H', G)$

  (si F_* rés. libre de H, et F'_* est rés libre de H', alors $F_* \oplus F'_*$ est rés. libre de $H \oplus H'$)

- $\mathrm{Ext}(F, G) = 0$ si F est libre

  (grace à la résolution libre $0 \longrightarrow \underset{\underset{F}{\parallel}}{F_0} \longrightarrow F \longrightarrow 0$)

- $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) \cong G/nG$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{rés libre} & 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \to 0 \\[1em] \text{duale} & 0 \to \mathbb{Z}_n^* \to \underset{\substack{\cong \\ G}}{\mathbb{Z}^*} \xrightarrow{n} \underset{\substack{\cong \\ G}}{\mathbb{Z}^*} \to 0 \end{array}\right)$$

- Si H est de type fini, alors
$\mathrm{Ext}(H, \mathbb{Q}) \cong \mathrm{Ext}(H, \mathbb{R}) = 0$

$$\left(\begin{array}{l} H \cong F \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k} \\[0.5em] \mathbb{Q}/n\mathbb{Q} = 0 \ , \quad \mathbb{R}/n\mathbb{R} = 0 \end{array}\right)$$

complexe de chaînes

$$\cdot \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

G grp abelien (coeff) $\qquad A^* = \mathrm{Hom}(A, G)$

$$0 \longrightarrow C_0^* \xrightarrow{d_0} C_1^* \xrightarrow{d_1} C_2^* \xrightarrow{d_2} \cdots$$

complexe "duale"

$$d_n = \partial_{n+1}^* \qquad d_n \psi = \psi \circ \partial_{n+1}$$

$$H^n(C_*) := H_n(C^*)$$

Thm des coefficients universels (cohomologie)

$\forall$ complexe de chaînes de groupes abeliens libres

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$\exists$ suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C_*),G) \longrightarrow H^n(C_*;G) \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}(H_n(C_*),G) \longrightarrow 0$$

$\forall n = 0, 1, \ldots$

Preuve

- $[\psi] \in H^n(C_*, G)$, $[\sigma] \in H_n(C_*)$

$$h(\underbrace{[\psi]}_{[\psi+\partial^*\mu]})\underbrace{[\sigma]}_{[\sigma+\partial\beta]} = \underbrace{\psi(\sigma)}_{(\psi+\partial^*\mu)(\sigma+\partial\beta)}$$

$$(\psi+\partial^*\mu)(\sigma+\partial\beta) = \psi(\sigma) + \overbrace{\psi(\partial\beta)}^{\partial^*\psi(\beta) = 0} + \overbrace{\partial^*\mu(\sigma)}^{\mu(\partial\sigma) = 0} + \overbrace{\partial^*\mu(\partial\beta)}^{= 0}$$

- $Z_n = \mathrm{Ker}(\partial_n) \supset B_n = \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$

  cycles   bords

suite exacte courte de groupes libres

$$0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{j_n} C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

suite duale est exacte également

$$0 \longrightarrow B^*_{n-1} \xrightarrow{\partial^*_n} C^*_n \xrightarrow{j^*_n} Z^*_n \longrightarrow 0$$

elle induit la suite exacte longue

$$\xrightarrow{i^*_{n-1}} B^*_{n-1} \longrightarrow H^n(C_*;G) \longrightarrow Z^*_n \xrightarrow{i^*_n} B^*_n \longrightarrow$$

L'homomorphisme de connexion est i^*_n, où $i_n : B_n \xrightarrow{\mathrm{incl}} Z_n$

en fait

$$\begin{tikzcd}
 & & \psi \arrow[r, mapsto] & J_m^*\psi \\[-2em]
 & & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\[-2em]
0 \arrow[r] & B_{m-1}^* \arrow[r, "\partial_m^*"] \arrow[d, "0"] & C_m^* \arrow[r, "J_m^*"] \arrow[d, "\partial_{m+1}^*"] & Z_m^* \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_m^* \arrow[r, "\partial_{m+1}^*"] & C_{m+1}^* \arrow[r, "J_{m+1}^*"] & Z_{m+1}^* \arrow[r] & 0 \\[-2em]
 & \rotatebox{90}{$\ni$} & \rotatebox{90}{$\ni$} & & \\[-2em]
 & & \partial_{m+1}^*\psi & & \\[-2em]
 & & \rotatebox{90}{$=$} & & \\[-2em]
 & \iota_m^* J_m^* \psi \arrow[r, mapsto] & \partial_{m+1}^* \iota_m^* J_m^* \psi & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & C_{m+1} \arrow[dl, "\partial_{m+1}"'] \arrow[dr, "\partial_{m+1}"] & \\
B_m \arrow[r, "\iota_m"] & Z_m \arrow[r, "J_m"] & C_m
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & C_{m+1}^* & \\
C_m^* \arrow[ur, "\partial_{m+1}^*"] \arrow[r, "J_m^*"] & Z_m^* \arrow[r, "\iota_m^*"] & B_m^* \arrow[ul, "\partial_{m+1}^*"']
\end{tikzcd}$$

- On obtient une suite exacte courte

$$0 \to \operatorname{coker}(\iota_{m-1}^*) \longrightarrow H^m(C_*, G) \xrightarrow{J^*} \ker(\iota_m^*) \longrightarrow 0$$

$$\operatorname{coker}(\iota_{m-1}^*) = B_{m-1}^*/\operatorname{im}(\iota_{m-1}^*)$$

$$B_n \xhookrightarrow{i_n} Z_n \xhookrightarrow{j_n} C_n$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{coker}(i_{n-1}^*) \arrow[r] & H^n(C_*;G) \arrow[r, "j_n^*"] \arrow[dr, "h"'] & \boxed{\begin{array}{c}\operatorname{Ker}(i_n^*) \\ \cong \\ \operatorname{coker}(i_n)^*\end{array}} \arrow[r] & 0 \\
& & & \operatorname{Hom}(H_n(C_*);G) &
\end{tikzcd}$$

(on a utilisé la propriété générale.

$A \xrightarrow{\psi} B \Rightarrow$ suite exacte $A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow \operatorname{coker}(\psi) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow$ suite exacte $0 \longrightarrow \operatorname{coker}(\psi)^* \longrightarrow B^* \xrightarrow{\psi^*} A^* \Rightarrow \boxed{\operatorname{Ker}(\psi^*) \cong \operatorname{coker}(\psi)^*}$)

- On a la suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{coker}(\imath_{n-1}^*) \to H^n(C_*, G) \to \mathrm{Hom}(H_n(C_*), G) \to 0$$

où $\imath_{n-1} : B_{n-1} \hookrightarrow Z_{n-1}$

- Résolution libre

$$0 \to B_n \xrightarrow{\imath_n} Z_n \longrightarrow H_n(C_*) \to 0$$

suite duale

$$0 \to H_n(C_*)^* \to Z_n^* \xrightarrow{\imath_n^*} B_n^* \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{coker}(\imath_n^*) \cong \mathrm{Ext}(H_n(C_*), G)$$

$\square$

exercice la suite exacte courte du thm des coeff univ est scindée

(comme C_n est libre, $0 \to Z_n \to C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0$ est scindée)

Cor Si $H_n(C_*)$ et $H_{n-1}(C_*)$ sont de type fini, alors

$$H^n(C_*;\mathbb{Z}) \cong \frac{H_n(C_*)}{H_n(C_*)_{tor}} \oplus H_{n-1}(C_*)_{tor}$$

Notation. A groupe abelian

$$A_{tor} = \{ g \in A \mid \operatorname{ord}(g) < \infty \}$$

Preuve

$$H_n(C_*) \cong \underset{\mathbb{Z}^r}{\underset{\shortparallel}{F_n}} \oplus \underset{\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k}}{\underset{\shortparallel}{T_n}} \qquad r = \text{rang}\, H_n(C_*)$$

$$0 \longrightarrow \underset{T_{n-1}}{\underset{\cong}{\underset{\operatorname{Ext}(T_{n-1}, \mathbb{Z})}{\underset{\cong}{\operatorname{Ext}(H_{n-1}(C_*), \mathbb{Z})}}}} \longrightarrow H^n(C_*, \mathbb{Z}) \xrightarrow{h} \underset{F_n}{\underset{\cong}{\underset{\operatorname{Hom}(F_n, \mathbb{Z})}{\underset{\cong}{\operatorname{Hom}(H_n(C_*), \mathbb{Z})}}}} \longrightarrow 0$$

$\square$

Résolution libre $\quad \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \to 0$

G groupe abelien (coefficients)

on obtien un complexe de chaînes (pas une resolution)

$$\to F_2 \otimes G \xrightarrow{f_2 \otimes id} \underbrace{F_1 \otimes G \xrightarrow{f_1 \otimes id} F_0 \otimes G \xrightarrow{f_0 \otimes id} H \otimes G \longrightarrow 0}_{\text{exacte}}$$

Preuve $\quad \psi : H \times G \to \operatorname{coker}(f_1 \otimes id)$, $\quad \psi(h, g) = [K \otimes g]$, où $f_0(K) = h$
(bien défini)

ψ induit homom. $\tilde{\psi} : H \otimes G \to \operatorname{coker}(f_1 \otimes id)$, isomorphisme avec inverse induit par $f_0 \otimes id$.

$\square$

exemple

résolution libre de $\mathbb{Z}_n$ $\quad 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \to 0$

$G = \mathbb{Z}_m$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_m \arrow[r, "n\otimes id"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_m \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & \mathbb{Z}_n\otimes\mathbb{Z}_m \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] & 0 \\
 & \mathbb{Z}_m & \mathbb{Z}_m & \mathbb{Z}_r & r = PGCD(n,m)
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ker}(n\otimes id) \cong \mathbb{Z}_r$

Lemme $\dfrac{\mathrm{Ker}(f_n \otimes \mathrm{id})}{\mathrm{Im}(f_{n+1} \otimes \mathrm{id})}$ est independent de F_*

Plus précisement, si F_* et G_* sont deux resolutions libres de H, toute morphisme de chaînes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\psi_2"] & F_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\psi_0"] & H \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & G_2 \arrow[r, "g_2"] & G_1 \arrow[r, "g_1"] & G_0 \arrow[r, "g_0"] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induit le même isomorphisme

$$\psi_* \quad \frac{\mathrm{Ker}(f_n \otimes \mathrm{id})}{\mathrm{Im}(f_{n+1} \otimes \mathrm{id})} \xrightarrow{\cong} \frac{\mathrm{Ker}(g_n \otimes \mathrm{id})}{\mathrm{Im}(g_{n+1} \otimes \mathrm{id})} \qquad \forall n \geq 0$$

Preuve Analogue à celle de l'enoncé sur la cohomologie des resolutions libres $\square$

Rmq $$\frac{\operatorname{Ker}(f_n \otimes id)}{\operatorname{Im}(f_{n+1} \otimes id)} = 0 \quad \forall n \neq 1$$

(car $\exists$ résolution libre $0 \to F_1 \to F_0 \to H \to 0$)

$$\operatorname{Tor}(H,G) = \frac{\operatorname{Ker}(f_1 \otimes id)}{\operatorname{Im}(f_2 \otimes id)}$$

Rmq

- $\mathrm{Tor}\left(\bigoplus_i A_i, G\right) \cong \bigoplus_i \mathrm{Tor}(A_i, G)$

  (en prenant la somme directe des résolutions des A_i)

- $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, G) = \mathrm{Ker}\left(G \xrightarrow{n} G\right)$

  (résolution libre $\quad 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \to 0$

  $\otimes G$

  $\Rightarrow \quad 0 \to G \xrightarrow{n} G \to \mathbb{Z}_n \otimes G \to 0$)

- $\mathrm{Tor}(A,G) = 0$ si A ou G est libre

(si A est libre, alors on a une résolution libre

$$0 \to A \to A \to 0$$

si G est libre, alors $\forall$ résolution libre F_* de A,

$F_* \otimes G$ est encore une résolution libre)

• Toute suite exacte courte $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ induit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}(A,G_1) \to \mathrm{Tor}(A,G_2) \to \mathrm{Tor}(A,G_3) \to A\otimes G_1 \to A\otimes G_2 \to A\otimes G_3 \to 0$$

(

résolution libre $0 \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} A \to 0$

$\Rightarrow$ complexe de chaînes $0 \to F_1 \otimes G_i \xrightarrow{f_1\otimes id} F_0 \otimes G_i \xrightarrow{f_0\otimes id} A\otimes G_i \to 0$

$F_0 \otimes G_i \to 0$

complexe "reduit"

la suite exacte voulue est la suite exacte longue induit par

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & F_1\otimes G_1 & \to & F_1\otimes G_2 & \to & F_1\otimes G_3 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & F_0\otimes G_1 & \to & F_0\otimes G_2 & \to & F_0\otimes G_3 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

} exacte

} exacte

(car F_i libre)

)

- $\mathrm{Tor}(A,G) \cong \mathrm{Tor}(G,A)$

résolution libre $0 \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} G \to 0$

comme $\mathrm{Tor}(A,F_i) = 0$, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}(A,G) \to A \otimes F_1 \xrightarrow{id \otimes f_1} A \otimes F_0 \xrightarrow{id \otimes f_0} A \otimes G \to 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tor}(A,G) \cong \mathrm{Ker}(id \otimes f_1) \underset{\substack{\text{déf.}\\ \text{de Tor}}}{\cong} \mathrm{Tor}(G,A)$$

• $\mathrm{Tor}(A, G) = 0$ si $\underset{\{g \in G \mid ng = 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{Z} \setminus 0\}}{\overset{}{G_{\mathrm{tor}}}} = 0$ $\quad (\text{ou } A_{\mathrm{tor}} = 0)$

supposons $G_{\mathrm{tor}} = 0$

rés. libre $\quad 0 \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} A \to 0$

$$0 \to F_1 \otimes G \xrightarrow{f_1 \otimes \mathrm{id}} F_0 \otimes G \xrightarrow{f_0 \otimes \mathrm{id}} A \otimes G \to 0$$

si $\sum_{i=1}^{n} f_1(y_i) \otimes g_i = 0$, alors $G' := \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ est libre

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes g_i \in \mathrm{Ker}\left(f_1 \otimes \mathrm{id} |_{F_1 \otimes G'} \right)$$

$$\| $$

$$\mathrm{Tor}(A, G')$$

$$\|$$

$$\mathrm{Tor}(G', A) = 0 \quad \text{car } G' \text{ libre}$$

- $\mathrm{Tor}(A,G) \cong \mathrm{Tor}(A_{tor},G)$

évident si A est de type fini $(A \cong F \oplus A_{tor})$

en generale.

suite exacte $0 \to A_{tor} \to A \to \underbrace{A/A_{tor}}_{\text{sans torsion}} \to 0$

$\Rightarrow$ suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}(G, A_{tor}) \to \mathrm{Tor}(G,A) \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{\mathrm{Tor}(G, A/A_{tor})} \to \dots$$

- $\mathrm{Tor}(A,\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Tor}(A,\mathbb{R}) = 0$

- $A = 0$ ssi $A \otimes \mathbb{Q} = 0$ et $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}_p) = 0$ $\forall$ premier p

la suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p \to 0$ induit la suite exacte

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z})} \to \mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}_p) \to \underset{\substack{\wr\| \\ A}}{A \otimes \mathbb{Z}} \xrightarrow{p} \underset{\substack{\wr\| \\ A}}{A \otimes \mathbb{Z}} \to A \otimes \mathbb{Z}_p \to 0$$

si $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}_p) = 0$ $\forall$ premier p, alors $pg \neq 0$ $\forall g \in A \setminus \{0\}$,

donc $A_{tor} = 0$

si $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}_p) = 0$ $\forall$ premier p et $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Q}) = 0$, la suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ induit la suite exacte

$$\underset{\substack{\| \\ 0 \\ (\text{car } A_{tor} = 0)}}{\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \to \underset{\substack{\wr\| \\ A}}{A \otimes \mathbb{Z}} \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{A \otimes \mathbb{Q}} \to A \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

$\Rightarrow A = 0$

Thm des coefficients universels (homologie)

$\forall$ complexe de chaînes de groupes abeliens libres

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$\exists$ suites exactes courtes

$$0 \to H_n(C_*)\otimes G \to H_n(C_*;G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*),G) \to 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Preuve $(Z_n = \mathrm{Ker}\,\partial_n \subset C_n,\ B_n = \mathrm{Im}\,\partial_{n+1} \subset Z_n)$

- suite exacte courte $\quad 0 \to Z_n \xrightarrow{J_n} C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0$

$\Downarrow$

suite exacte courte $\quad 0 \to Z_n\otimes G \xrightarrow{J_n\otimes id} C_n\otimes G \xrightarrow{\partial_n\otimes id} B_{n-1}\otimes G \to 0$

$(\mathrm{Tor}(B_n,G)=0)$

$\Rightarrow$ suite exacte longue

$$\xrightarrow{(\iota_m\otimes id)} Z_m\otimes G \xrightarrow{J_m\otimes id} H_m(C_*;G) \xrightarrow{(\partial_m\otimes id)_*} B_{m-1}\otimes G \xrightarrow{(\iota_m\otimes id)} Z_{m-1}\otimes G \to .$$

où l'homomorphisme de connexion est induit par l'inclusion

$$\iota_m : B_m \hookrightarrow Z_m$$

$$\left(\begin{tikzcd}
 & & \sigma & (\partial_m\otimes id)\sigma & \\
 & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$} & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$} & \\
0 \arrow[r] & Z_m\otimes G \arrow[r, "J_m\otimes id"] & C_m\otimes G \arrow[r, "\partial_m\otimes id"] \arrow[d, "\partial_m\otimes id"] & B_{m-1}\otimes G \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{m-1}\otimes G \arrow[r, "J_{m-1}\otimes id"] & C_{m-1}\otimes G \arrow[r] & B_{m-2}\otimes G \arrow[r] & 0 \\
 & \rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} & \rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} & & \\
 & & (\partial_m\otimes id)\sigma & & \\
 & & \shortparallel & & \\
 & (\iota_m\otimes id)(\partial_m\otimes id)\sigma \arrow[r, mapsto] & (J_m\otimes id)(i_m\otimes id)(\partial_m\otimes id)\sigma & &
\end{tikzcd}\right)$$

- On obtient la suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{coker}(i_n \otimes id) \xrightarrow{J_n \otimes id} H_n(C_*, G) \xrightarrow{(\partial_n \otimes id)_*} \mathrm{Ker}(i_{n-1} \otimes id) \longrightarrow 0$$

- suite exacte $\quad 0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \longrightarrow H_n(C_*) \longrightarrow 0 \qquad (*)$

induit suite exacte $\quad B_n \otimes G \xrightarrow{i_n \otimes id} Z_n \otimes G \longrightarrow H_n(C_*) \otimes G \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \mathrm{coker}(i_n \otimes id) \cong H_n(C_*) \otimes G$$

- $(*)$ est une résolution libre de $H_n(C_*)$, donc

$$0 \longrightarrow B_n \otimes G \xrightarrow{i_n \otimes id} Z_n \otimes G \longrightarrow H_n(C_*) \otimes G \longrightarrow 0$$

on conclut $\quad \mathrm{Ker}(i_n \otimes id) \cong \mathrm{Tor}(H_n(C_*), G)$

$\square$