CUP-PRODUIT

R anneau (on travaillera avec $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)
(unitaire)

La cohomologie à coefficients dans R est un anneau
(et même une algèbre)

Notation

$$\Delta^n \quad \text{simplexe standard}$$

$$\Delta^n = [e_0, \dots, e_n]$$

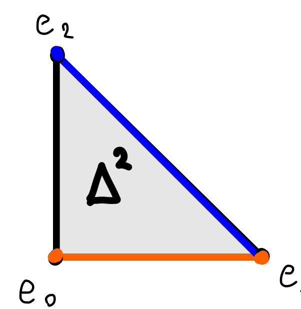
enveloppe convexe engendré par $e_0, \underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{base canonique de } \mathbb{R}^n}$

$e_0 = 0$

K-face avant: $\underbrace{[e_0, \dots, e_k]}_{\equiv \Delta^k} \subset \Delta^n$

(n-K)-face arrière: $\underbrace{[e_k, e_{k+1}, \dots, e_n]}_{\equiv \Delta^{n-k}} \subset \Delta^n$

exemple



$K = 1$

cochaînes $\quad \alpha \in \underbrace{C^a(X;R)}_{\mathrm{Hom}(C_a(X),R)}, \quad \beta \in \underbrace{C^b(X,R)}_{\mathrm{Hom}(C_b(X),R)}$

R anneau

cup-produit $\quad \alpha \cup \beta \in C^{a+b}(X,R)$

$$(\alpha \cup \beta)(\sigma) := \alpha(\sigma|_{[e_0,\dots,e_a]}) \, \beta(\sigma|_{[e_a, \dots, e_{a+b}]})$$

produit dans R

$[e_a, \dots, e_{a+b}] \overset{?}{\cong} [e_0, \dots, e_b]$

$\forall \sigma \quad \Delta^{a+b} \to X$

$d_m : C^m(X;R) \longrightarrow C^{m+1}(X;R)$, $\quad d_m = \partial^*_{m+1}$

Lemme

$$d(\alpha \smile \beta) = (d\alpha) \smile \beta + (-1)^a \alpha \smile (d\beta)$$

$$\forall \alpha \in C^a(X;R),\ \beta \in C^b(X;R)$$

Preuve

$\sigma \quad \Delta^{a+b+1} \longrightarrow X$ simplexe singulier

$$(d\alpha) \smile \beta\ (\sigma) = \alpha \circ \partial\left(\sigma|_{[e_0, .. , e_{a+1}]}\right) \beta\left(\sigma|_{[e_{a+1}, .. , e_{a+b+1}]}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{a+1} \underbrace{(-1)^i \alpha\left(\sigma|_{[e_0 .. \cancel{e_i} . e_{a+1}]}\right) \beta\left(\sigma|_{[e_{a+1}, .. , e_{a+b+1}]}\right)}_{r_i}$$

$$(-1)^a \alpha \smile (d\beta)\,(\sigma) = (-1)^a\, \alpha(\sigma|_{[e_0 \ldots e_a]})\, \beta \circ \partial(\sigma|_{[e_a \ldots e_{a+b+1}]})$$

$$= \sum_{i=0}^{b+1} \underbrace{(-1)^{a+i}\, \alpha(\sigma|_{[e_0 \ldots e_a]})\, \beta(\sigma|_{[e_a \ldots \cancel{e_{a+i}} \ldots e_{a+b+1}]})}_{s_i}$$

$$r_{a+1} = -s_0, \qquad r_0 + \ldots + r_a + s_1 + \ldots + s_{b+1} = (\alpha \smile \beta) \circ \partial \sigma \quad \square$$

On obtient donc un cup-produit en cohomologie

$$[\alpha] \smile [\beta] = [\alpha \smile \beta] \in H^{a+b}(X; R)$$

bien définit, car $\underbrace{[d\gamma]}_{0} \smile [\beta] = [(d\gamma) \smile \beta] = [d(\gamma \smile \beta) \pm \gamma \smile \underbrace{d\beta}_{0}] = 0$

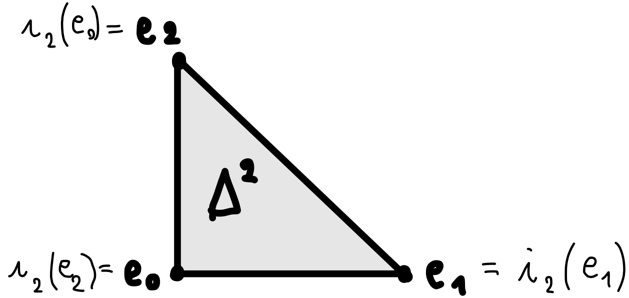
Thm Si R est un anneau commutatif, alors

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{ab}\, \beta \smile \alpha \qquad \forall\, \alpha \in H^a(X;R),\ \beta \in H^b(X,R)$$

Preuve

- $\rho_n : C_n(X) \to C_n(X) \qquad \rho_n(\sigma) = \varepsilon_n \cdot \sigma \circ i_n$

  où $\begin{cases} i_n \text{ est l'application affine t q } \ i_n(e_j) = e_{n-j} \\ \varepsilon_n = (-1)^{n(n+1)/2} \end{cases}$



- S_n est $\underbrace{\text{homotope}}_{\text{bien sur, par une homotopie de chaînes}}$ à id

$$S_n - \mathrm{id} = P_{n-1} \circ \partial + \partial \circ P_n \qquad \text{où} \qquad P_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$$

n-simplex singulier

$$P_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \varepsilon_{n-i} \; \sigma \circ \phi_i$$

$\phi_i \quad \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n$ est l'application affine tq

$$\phi_i(e_0) = e_0, \quad \phi_i(e_1) = e_1, \quad \dots, \quad \phi_i(e_i) = e_i$$

$$\phi_i(e_{i+1}) = e_n, \quad \phi_i(e_{i+2}) = e_{n-1}, \quad \dots, \quad \phi_i(e_n) = e_i$$

- $\rho^* = id^*$ en cohomologie
- $\alpha \in C^a(X,R)$, $\beta \in C^b(X,R)$, σ $(a+b)$-simp sing

$$\rho^*(\alpha \smile \beta)(\sigma) = \alpha(\rho(\sigma)|_{[e_0 \,.\, e_a]})\,\beta(\rho(\sigma)|_{[e_a \,.\, e_{a+b}]})$$

$$= \varepsilon_{a+b}\,\alpha(\sigma|_{[e_{a+b},\dots,e_b]})\cdot\beta(\sigma|_{[e_b \;\; e_0]})$$

$$\rho^*\beta \smile \rho^*\alpha\,(\sigma) = \beta\circ\rho(\sigma|_{[e_0 \,.\, e_b]})\,\alpha\circ\rho(\sigma|_{[e_b .. \, e_{a+b}]})$$

$$= \varepsilon_b\,\beta(\sigma|_{[e_b \,.\, e_0]})\;\varepsilon_a\,\alpha(\sigma|_{[e_{a+b} \,..\, e_b]})$$

- $[\alpha \smile \beta] = [\rho^*(\alpha \smile \beta)] = \varepsilon_{a+b}\varepsilon_a\varepsilon_b[\rho^*\beta \smile \rho^*\alpha] = \varepsilon_{a+b}\varepsilon_a\varepsilon_b[\beta \smile \alpha]$

$$\varepsilon_a \, \varepsilon_b = (-1)^{a(a+1)/2}$$

$$\varepsilon_{a+b} = (-1)^{(a+b)(a+b+1)/2} = \varepsilon_a \cdot \varepsilon_b \, (-1)^{a\,b}$$

$$\Rightarrow \quad S^*(\alpha \vee \beta) = (-1)^{a\,b} \, S^*\beta \vee S^*\alpha$$

$$\Rightarrow \quad [\alpha \vee \beta] = (-1)^{a\,b} \, [\beta \vee \alpha]$$

$$\square$$

Rmq

- $(\alpha \smile \beta) \smile \gamma = \alpha \smile (\beta \smile \gamma)$ $\forall$ cochaînes α, β, γ

  Donc

  $$\left(H^*(X;R) := \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X;R), \ +, \ \smile \right)$$

  est un anneau

- $\alpha, \beta \in H^*(X;R)$, $f : Y \to X$ continue

  $$\Rightarrow \quad f^*(\alpha \smile \beta) = (f^*\alpha) \smile (f^*\beta)$$

- Le cup-produit induit un cup-produit relatif.

$$\alpha \cup \beta \in C^*(X, A; R) \quad \forall \alpha \in C^*(X, A; R), \beta \in C^*(X, A, R)$$

$$C^*(X,A;R) = \left\{ \psi \in C^*(X;R) \;\middle|\; \begin{array}{l} \psi(\sigma) = 0 \\ \forall \text{ simp sing } \sigma \subset A \end{array} \right\}$$

De manière plus generale

Lemme $\forall \; A, B \subset X$ tq $\begin{cases} A \text{ ouvert dans } A \cup B \\ B \text{ ouvert dans } A \cup B \end{cases}$

on a un cup-produit

$$\alpha \cup \beta \in H^*(X, A \cup B; R) \quad \forall \alpha \in H^*(X, A; R), \beta \in H^*(X, B; R)$$

⚠ $$C^*(X, A, R) \cap C^*(X, B, R) \subsetneq C^*(X, A \cup B; R)$$

Preuve

- Par le thm de petits chaînes

$$C_*(X, \{A,B\}) \xrightarrow{\iota} C_*(X, A \cup B)$$

$$C_*(X,\{A,B\}) = \frac{C_*(X)}{C_*(A) + C_*(B)}$$

$$H_*(\{A,B\}) \cong H_*(A \cup B)$$

induit un isomorphisme en homologie, donc

$$C^*(X, A\cup B, R) \xrightarrow{\iota^*} C^*(X, \{A,B\}; R)$$

$$C^*(X,\{A,B\};R) = \mathrm{Hom}(C_*(X,\{A,B\}), R)$$

induit un isomorphisme en cohomologie

- $\forall\, \alpha \in C^*(X, A; R), \quad \beta \in C^*(X, B; R)$

$$\alpha \cup \beta \in C^*(X, \{A, B\}; R)$$

$\square$