ENS de Lyon
TD1

Master 1 – Topologie algébrique
2020-2021

Homotopie ; groupe fondamental

Exercise 1. Généralités

On fixe X et Y deux espaces topologiques.

1. On suppose que X est connexe par arcs. Soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues. Montrer que si f et$g$ sont homotopes, alors leurs images sont contenues dans la même composante connexe par arcs de Y.
2. On suppose que Y est contractile (c'est-à-dire que l'inclusion d'un point dans Y est une équivalence d'homotopie). Montrer que deux applications continues $f, g : X \to Y$ sont toujours homotopes.
3. Montrer que si deux applications continues $f, g : X \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sont telles que pour tout $x \in X$, on ait $|f(x) - g(x)| < |f(x)|$ (en norme euclidienne), alors f et g sont homotopes.
4. Soit $n \geq 1$. Montrer que toute application continue non-surjective $X \to \mathbb{S}^n$ est homotope à une application constante.
5. Soit $n \geq 1$. Montrer que si deux applications continues $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ sont telles que pour tout $x \in X$, on ait $|f(x) - g(x)| < 2$, alors f et g sont homotopes. En déduire qu'une application continue sans point fixe $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ est homotope à l'application $x \mapsto -x$.
6. Soit $(X_i, x_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés. Montrer que l'application canonique
$$\prod_i (p_i)_* : \pi_1 \left(\prod_i X_i, (x_i)_i \right) \to \prod_i \pi_1(X_i, x_i)$$
est un isomorphisme.

Exercise 2. Équivalences d'homotopie

1. Le *ruban de Möbius* est l'espace topologique M, quotient de $[0,1] \times [0,1]$ par l'identification $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$. Dessiner M. Montrer que M a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^1$.
2. SiX et X', resp. Y etY', sont des espaces topologiques homotopiquement équivalents, montrer queles produits $X \times Y$ et $X' \times Y'$ ont même type d'homotopie.
3. Soit C un espace contractile et soit X un espace topologique. Monter que $X \times C$ a le même type d'homotopie que X.

Exercise 3. Type d'homotopie d'un complémentaire

1. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^n$, avec $k < n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus E$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^{n-k-1}$.
2. Soit C un sous-ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus C$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^{n-1}$.
3. Soit X un espace topologique, et soient A et B deux sous-espaces de X, non vides et distincts de X. Montrer que l'on peut avoir A et B homotopiquement équivalents, sans que $X \setminus A$ et $X \setminus B$ soient homotopiquement équivalents.
4. Montrer que le tore privé d'un point a le type d'homotopie d'un bouquet de deux cercles (c'est-à-dire de deux cercles recollés en un point).

Exercise 4. Groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

Le but de cet exercice est de calculer le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$. On prend comme modèle de $\mathbb{S}^1$ le cercle unité dans $\mathbb{C}$.

1. Soit $\gamma : I \to \mathbb{S}^1$ un lacet basé au point 1. Montrer qu'il existe un entier $n > 0$ tel que pour tout $0 \leq i < n$, l'image de $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ par γ est incluse dans $\mathbb{S}^1 \setminus \{i\}$ ou dans $\mathbb{S}^1 \setminus \{-i\}$.

2. Soit $e : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi x} \in \mathbb{S}^1$. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un unique relèvement continu $\widetilde{\gamma}$ de γ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, (i.e. une unique application (continue) $\widetilde{\gamma} : \left[0, \frac{1}{n}\right] \to \mathbb{R}$ tel que $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ e$), tel que $\widetilde{\gamma}(0) = m$.

$$\begin{tikzcd} \left[0, \frac{1}{n}\right] \arrow[r, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "e"] \\ & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

3. Montrer qu'il existe un unique relèvement continu $\widetilde{\gamma}$ de γ sur I, tel que $\widetilde{\gamma}(0) = m$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "e"] \\ & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

4. Montrer que $\widetilde{\gamma}(1) - \widetilde{\gamma}(0)$ est un entier indépendant du relèvement choisi (i.e. de l'entier $m = \widetilde{\gamma}(0)$). On appellera cet entier le *degré* de γ et on le notera $\deg(\gamma)$.
5. Soit $H : I^2 \to \mathbb{S}^1$ une homotopie entre deux lacets γ et γ'. Construire $\widetilde{H}$ un relèvement de H. Montrer que $\tilde{H}$ est une homotopie entre $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\gamma'}$. En déduire que deg définit une application

$$\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}.$$

6. Montrer que deg est un isomorphisme de groupes.

Exercise 5. Lacets remplissant la sphère

1. Soit $n \geq 1$ et soit γ un lacet sur la sphère $\mathbb{S}^n$ dont l'image ne soit pas toute la sphère. Montrer queγ est homotope au lacet constant (de même point base).
2. Soit $n \geq 1$. On admet le fait qu'il existe des lacets dont l'image soit égale à toute la sphère $\mathbb{S}^n$. En existe-t-il qui soient de plus homotopes à un lacet constant ?
3. Soit $n \geq 2$. Soit γ un chemin sur $\mathbb{S}^n$. Montrer qu'il existe un entier $n > 0$ tel que pour tout $0 \leq i < n$, la restriction $\gamma\Big|_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}$ soit homotope relativement aux extrémités $\frac{i}{n}$ et $\frac{i+1}{n}$, à un chemin d'image nulle part dense dans la sphère $\mathbb{S}^n$. En déduire que tout lacet sur $\mathbb{S}^n$ est homotope à un lacet constant. Conclure que $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$.

Exercise 6. Groupe fondamental d'un groupe topologique

1. **Principe de Eckmann-Hilton.** Soit X un ensemble. On suppose que X est équipé de deux produits compatibles, c'est-à-dire de deux applications $* : X \times X \to X$ et $\cdot : X \times X \to X$ vérifiant les conditions suivantes :
   (a) Chaque loi admet une unité 1_* et $1.$, respectivement.
   (b) Pour tous $x, x', y, y' \in X$,
   $$(x \cdot x') * (y \cdot y') = (x * y) \cdot (x' * y')$$
   .

   Montrer que les deux applications produits sont égales, et qu'elles définissent une structure de monoïde commutatif sur X.
2. Montrer que le groupe fondamental d'un groupe topologique est abélien. (On rappelle qu'un groupe topologique est un espace topologique muni d'une loi de groupe pour laquelle la multiplication et le passage à l'inverse sont continus).