Formule de Künneth

Exercice 1.

Calculer les groupes de cohomologie des espaces topologiques suivants à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. $S^n \times S^m$.
2. Le tore de dimension n.
3. $\Sigma_g \times \Sigma_h$

Exercice 2.

Le but de cet exercice est de comprendre la structure de cup-produit sur $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. Rappeler les groupes de cohomologie de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En déduire que l'on a un isomorphisme de groupes entre $\mathrm{H}^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$.
2. On va montrer par récurrence sur n que l'on peut en fait obtenir un isomorphisme d'anneaux entre ces deux objets. Reprendre l'exercice 5 du TD précédent pour vérifier le cas $n = 2$.
3. Montrer que l'inclusion $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ induit un isomorphisme sur les H^i pour $i \leq n-1$.
4. En déduire qu'il suffit de montrer que le cup produit d'un générateur de $\mathrm{H}^{n-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et d'un générateur de $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un générateur de $\mathrm{H}^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
5. On rappelle que les points de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ sont repérés par des coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_n]$. On a une copie de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ donnée par $\Delta = \{[x_0 : x_1 : 0 : \cdots : 0]\}$ et une copie de $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ donnée par $\Pi = \{[0 : x_1 : \cdots : x_n]\}$. Leur intersection est le point $p = [0 : 1 : 0 : \cdots : 0]$. Rappeler pourquoi l'ouvert $U = \{x_1 \neq 0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ et donner l'image dans $\mathbb{R}^n$ des intersections de p et des intersections de U avec Δ et Π.
6. Montrer que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \{p\}$ se rétracte par déformation sur $\Pi' = \{[x_0 : 0 : x_2 : \cdots : x_n]\} \simeq \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. En déduire que l'application canonique $\mathrm{H}^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \{p\}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ esr un isomorphisme (indication : utiliser la cohomologie cellulaire).
7. Montrer que l'application donnée par l'inclusion de paires $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq (U, U \setminus \{p\})$ dans $(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \{0\})$ induit un isomorphisme
$$\mathrm{H}^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \{p\}) \to \mathrm{H}^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$
8. Soit $i = 1$ ou $n-1$, montrer que les applications naturelles ci-dessous sont des isomorphismes (où l'on sous-entend que l'on travaille à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^*$) :
$$\mathrm{H}^i(\mathbb{R}\mathrm{P}^i) \leftarrow \mathrm{H}^i(\mathbb{R}\mathrm{P}^i, \mathbb{R}\mathrm{P}^{i-1}) \leftarrow \mathrm{H}^i(\mathbb{R}\mathrm{P}^i, \mathbb{R}\mathrm{P}^i \setminus \{p\}) \to \mathrm{H}^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i \setminus \{0\}).$$
9. Montrer (en utilisant le cohomologie cellulaire) que les flèches du carré suivant sont des isomorphismes :
$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \arrow[d] & \mathrm{H}^i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^{i-1}) \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathrm{H}^i(\mathbb{R}\mathrm{P}^i) & \mathrm{H}^i(\mathbb{R}\mathrm{P}^i, \mathbb{R}\mathrm{P}^{i-1}). \arrow[l] \end{tikzcd}$$
10. Montrer que $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-i}$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{R}\mathrm{P}^{i-1}$. En déduire que toutes les flèches du diagramme suivant sont des isomorphismes :
$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \arrow[d] & \mathrm{H}^i(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-i}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^i) \arrow[d] \\ \mathrm{H}^i(\mathbb{R}\mathrm{P}^i) & \mathrm{H}^i(\mathbb{R}\mathrm{P}^i, \mathbb{R}\mathrm{P}^i \setminus \{p\}). \arrow[l] \arrow[r] & \mathrm{H}^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i \setminus \{0\}). \end{tikzcd}$$

*on le sous-entendra d'ailleurs pour le reste de l'exercice

11. Montrer que le diagramme suivant commute et que ses colonnes sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \times \mathrm{H}^{n-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \arrow[r, "\smile"] & \mathrm{H}^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \\
\mathrm{H}^1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \times \mathrm{H}^{n-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \mathbb{R}\mathrm{P}^1) \arrow[r, "\smile"] \arrow[u] \arrow[d] & \mathrm{H}^n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \{p\}) \arrow[u] \arrow[d] \\
\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}) \times \mathrm{H}^{n-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^1) \arrow[r, "\smile"] & \mathrm{H}^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})
\end{tikzcd}$$

12. Déduire le résultat à l'aide de la formule de Künneth appliquée à la ligne du bas dans le diagramme précédent.