Orientabilité, classe fondamentale

Exercice 1.
Montrer que si M est une variété différentielle, les deux notions d'orientabilité définies en cours coïncident.

Exercice 2.
Montrer que la surface Σ'_g n'est pas orientable. Montrer que si n est pair $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ n'est pas orientable.

Exercice 3.
Montrer que les variétés suivantes sont orientables :

1. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$.
2. Σ_g.
3. S^n.
4. $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.
5. $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$.

Exercice 4.
Montrer que retirer un point d'une variété de dimension au moins 2 n'affecte pas son orientabilité.

Exercice 5.
Soit M une variété topologique de dimension n.
On définit le *fibré des orientations* de M :

$$OM = \{(x, \mu) \mid x \in M, \mu \text{ est un générateur de } \mathrm{H}_n(M, M \setminus \{x\})\}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique structure de variété topologique sur OM telle que la première projection $OM \to M$ est un revêtement à deux feuillets. Montrer que si M est de plus supposée lisse, OM est lisse.
2. Montrer que OM est toujours orientable.
3. Montrer que M est orientable si et seulement si OM n'est pas connexe et que dans ce cas OM est homéomorphe à la réunion disjointe de deux copies de M.
4. En déduire qu'une variété simplement connexe (ou plus généralement dont le groupe fondamental n'a pas de sous-groupe d'indice 2) est orientable.

Exercice 6. Soit M une variété orientable de dimension n. Choisissons $(\mu_x)_{x\in M}$ une orientation de M. Soit f un homéomorphisme de M.

1. Montrer que la famille $(f_*(\mu_x))_{x\in M}$ est encore une orientation de M, *i.e.*

$$(f_*(\mu_x))_{x\in M} \in \{(\mu_x)_{x\in M}; (-\mu_x)_{x\in M}\}.$$

   Si $(f_*(\mu_x))_{x\in M} = (\mu_x)_{x\in M}$, on dit que f *préserve l'orientation de* M.

2. Montrer que si M est compacte, f préserve l'orientation de M si et seulement si $f_*([M]) = [M]$. En déduire quand l'application antipodale $S^n \to S^n$ préserve l'orientation.
3. Montrer que si G est un groupe discret muni d'une action propre et totalement discontinue par homéomorphismes préservant l'orientation de M, le quotient M/G est orientable. En déduire une nouvelle démonstration du fait que $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$ est orientable.

Exercice 7.

Décrire une classe fondamentale de Σ_g et de S^n. Déduire de l'exercice précédent une classe fondamentale de $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$.

Exercice 8.

Soit M et N deux variétés compactes sans bord orientables de dimension n. On sait (par exemple par dualité de Poincaré) que $\mathrm{H}_n(M) = \mathbb{Z}[M]$ et que $\mathrm{H}_n(N) = \mathbb{Z}[N]$. On appelle *degré* de $f : M \to N$ l'entier d tel que $f_*([M]) = d[N]$. Montrer que toute variété M compacte sans bord orientable de dimension n est munie d'une application de degré 1

$$M \to S^n.$$