Dualité de Poincaré

Exercice 1. (Variétés de dimension 3).

1. Soit M une variété compacte simplement connexe orientable de dimension 3. Calculer les groupes de cohomologie de M.
2. Soit M une variété compacte orientable de dimension 3. On écrit

$$\mathrm{H}_1(M) = \mathbb{Z}^r \oplus F$$

avec F un groupe fini. Calculer les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de M.

Exercice 2.
Soit M une variété compacte connexe orientable de dimension n. Montrer que $\mathrm{H}_{n-1}(M)$ est sans torsion.

Exercice 3.
Soit M une variété connexe compacte non-orientable. Montrer que

$$\mathrm{H}_n(M; \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } m \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En déduire que le groupe de torsion de $\mathrm{H}_{n-1}(M)$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 4.
Soit M une variété connexe compacte non-orientable de dimension 3. On écrit

$$\mathrm{H}_1(M) = \mathbb{Z}^r \oplus F$$

avec F un groupe fini.

1. Calculer les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de M.
2. En déduire que $\mathrm{H}_2(M) = \mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (en particulier $r > 1$).
3. En déduire que le groupe fondamental de M est infini.

Exercice 5.
Soit X une variété compacte connexe de dimension n. Montrer que l'on a des isomorphismes induits par le choix d'une classe fondamentale :

$$\mathrm{H}_i(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathrm{H}^i(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathrm{H}_{n-i}(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathbb{Q}).$$

Exercice 6.
Montrer qu'en choisissant une classe fondamentale, le cup produit induit un produit appelé *produit d'intersection*

$$\mathrm{H}_k(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathrm{H}_{n-k}(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}.$$

Soit M une sous-variété de dimension k de X. On note encore $[M]$ l'image d'une classe fondamentale de M dans $\mathrm{H}_k(X, \mathbb{Z})$.

Si M et N sont deux sous-variétés de X, de dimension k et $n-k$ respectivement. On appelle *nombre d'intersection de* M et N l'image de $[M] \otimes [N]$ par le produit d'intersection.

Calculer le nombre d'intersection de deux cercles qui se coupent transversalement dans un tore. On peut en fait montrer que si X est une variété lisse, le nombre d'intersection de deux sous-variétés qui se coupent "transversalement" est le nombre de points d'intersections des deux sous-variétés, comptés avec un certain signe.

Les applications de ce fait sont innombrables. Le théorème des points fixes de Lefschetz en est un exemple :

Théorème 1 *Soit X une variété lisse de dimension d et $f : X \to X$ lisse dont les points fixes sont isolés, et non-dégénérés (i.e. si p est un point fixe, $\mathrm{Id} - df_p : T_pX \to T_pX$ est inversible. On note alors $\varepsilon(p)$ le signe de son déterminant). Alors,*

$$|\operatorname{Fix}(f)| := \sum_{f(p)=p} \varepsilon(p) = \sum_{i=0}^{d} \operatorname{Tr}(f_* : \mathrm{H}_i(X, \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_i(X, \mathbb{Q})).$$