ENS de Lyon — Master 1 – Topologie algébrique

TD2 — 2020-2021

Groupes d'homotopie supérieurs ; Complexes de chaînes

Exercise 1. Les groupes d'homotopie supérieurs sont abéliens

A partir du dessin donné au TD précédent, expliquer pourquoi les groupes d'homotopie supérieurs sont abéliens.

Exercise 2. Groupes d'homotopie supérieurs et revêtements

Soit $p : (X', x') \to (X, x)$ un revêtement, le but de cet exercice est de montrer que $p_* : \pi_n(X', x') \to \pi_n(X, x)$ est un isomorphisme si $n \geq 2$.

1. Rappeler brièvement pourquoi une application $\sigma : I^n \to X$ peut se relever en une application $\widetilde{\sigma} : I^n \to X'$. Rappeler également pourquoi le relèvement est unique si l'on fixe l'image d'un point.
2. Montrer que si $n \geq 2$, et si ∂I^n est envoyé sur x par σ, alors si l'on suppose qu'un point de ∂I^n est envoyé sur x' par $\widetilde{\sigma}$, ∂I^n est envoyé sur x'.
3. En déduire que p_* est un isomorphisme. En déduire la valeur de $\pi_n(\mathbb{S}^1)$ pour $n \geq 2$.

Exercise 3. Homotopie des complexes de chaînes

Un complexe de chaînes (C, ∂) est une suite de groupes abéliens $(C_n)_{n\geq 0}$ munie d'applications bords $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ telles que $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

Un morphisme de complexes de chaînes $f : (C, \partial) \to (D, \partial)$ est une suite d'applications $f_n : C_n \to D_n$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\partial_n"] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

L'homologie d'un complexe (C, ∂) est le groupe abélien gradué $\mathrm{H}_n(C, \partial) = \mathrm{Ker}(\partial_n)/\,\mathrm{Im}(\partial_{n-1})$.

Une homotopie entre deux morphismes de complexes f et g est une suite de morphismes $h_n : C_n \to D_{n+1}$ telle que pour tout n, $h_{n-1}\partial_n + \partial_{n+1}h_n = f_n - g_n$.

1. Montrer qu'un morphisme $f : C \to D$ de complexe de chaînes induit un morphisme de groupes abéliens gradués $\mathrm{H}_*(f) : \mathrm{H}_*(C) \to \mathrm{H}_*(D)$.
2. Montrer que si f et g sont homotopes, alors $\mathrm{H}_*(f) = \mathrm{H}_*(g)$.

Exercise 4. Produit tensoriel de complexes de chaînes

Soit (C', ∂') et (C'', ∂'') deux complexes de chaînes. On définit le complexe $(C' \otimes C'', \partial)$ par les formules

$$(C' \otimes C'')_n = \bigoplus_{p+q=n} C'_p \otimes_{\mathbb{Z}} C''_q$$

et pour $\sigma \in C'_p$, $\tau \in C''_q$,

$$\partial_{p+q}(\sigma \otimes \tau) = \partial'_p(\sigma) \otimes \tau + (-1)^p \sigma \otimes \partial''_q(\tau).$$

1. Montrer que $(C' \otimes C'', \partial)$ est un complexe de chaînes.
2. Construire une application $H_i(C') \otimes H_j(C'') \to H_{i+j}(C' \otimes C'')$.

Exercise 5. Cônes et équivalences d'homologie

Soit (C, ∂) un complexe de chaînes. La suspension de(C, ∂) est le complexe de chaînes $(sC, -\partial)$ défini par $sC_0 = 0$ et $sC_{i+1} = C_i$ pour $i \geq 0$.

Soit $f : C \to D$ un morphisme de complexes de chaînes. Le cône de f est le complexe de chaînes noté $C(f)$, défini par

$$C_0(f) = D_0, \quad C_{i+1}(f) = C_i \oplus D_{i+1} \text{ pour } i \geq 0,$$

avec la différentielle qui envoie $(x, y) \in C_i \oplus D_{i+1}$ sur $(-\partial x, \partial y + f(x)) \in C_{i-1} \oplus D_i$.

1. Vérifier que $C(f)$ est bien un complexe de chaînes.

2. Montrer qu'on a une suite exacte courte de complexes

$$0 \to D \to C(f) \to (sC) \to 0.$$

3. En déduire une suite exacte longue en homologie :

$$\cdots \to \mathrm{H}_i(D) \to \mathrm{H}_i(C(f)) \to \mathrm{H}_i((sC)) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}_{i-1}(D) \to \cdots$$

telle que le connectant δ soit égal à $\mathrm{H}_{i-1}(f)$ (indication : utiliser le lemme du serpent)

4. Montrer que f induit un isomorphisme en homologie si,et seulement si,le cône de f a une homologie triviale.On dit qu'un complexe est contractile si son application identité est homotope à l'application nulle.On suppose par la suite que $C(f)$ est contractile.
5. Montrer que l'injection $D \to C(f)$ est homotope à zéro. En déduire que f admet un inverse homotopique à droite.
6. Montrer que la surjection $C(f) \to sC$ est homotope à zéro. En déduire que f admet un inverse homotopique à gauche, puis que f est un équivalence d'homotopie.

Exercise 6. Cohomologie des groupes

Soit G un groupe, et soit M un groupe abélien muni d'une action linéaire de G, notée $*$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $C_{-n}(G, M)$ le groupe abélien des fonctions de G^n dans M (par convention $G^0 = 1$).

Pour tout $n < 0$, on pose $C_{-n}(G, M) = 0$. On définit un morphisme de groupes abéliens

$$\partial_{-n} : C_{-n}(G, M) \to C_{-n-1}(G, M)$$

par la formule

$$(\partial_{-n} f)(g_1, \cdots, g_{n+1}) := g_1 * f(g_2, \cdots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \cdots, g_n).$$

pour $f : G^n \to M$.

1. Montrer que $(C_*(G, M), \partial)$ est un complexe. Le $(-n)$-ème groupe d'homologie de $(C_*(G, M), \partial)$ s'appelle le n-ème groupe de cohomologie de G à valeurs dans M et est noté $\mathrm{H}^n(G, M)$.
2. Montrer que $\mathrm{H}^0(G, M)$ est isomorphe au sous-groupe des éléments de M fixes sous l'action de G.
3. On suppose que la représentation M est munie de l'action triviale de G. Montrer que $\mathrm{H}^1(G, M)$ au groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathrm{grp}}(G, M)$.
4. Montrer que si on a trois représentations M', M, M'' de G,et une suite exacte courte de représentations

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

alors on a une suite exacte longue en cohomologie associée :

$$0 \to \mathrm{H}^0(G, M') \to \mathrm{H}^0(G, M) \to \mathrm{H}^0(G, M'') \to \mathrm{H}^1(G, M') \to \cdots.$$