ENS de Lyon — Master 1 – Topologie algébrique
TD3 — 2020-2021

Premiers calculs d'homologie

Exercise 1. Homologie d'un graphe

Soit (V, E) un graphe. On note X sa réalisation comme espace topologique. V s'identifie alors un sous-espace discret de X et quitte à orienter le graphe, E s'identifie à une famille d'application continues $[0, 1] \to X$ qui envoie 0 et 1 sur des éléments de V.

On considère le complexe donné par les formules

$$C_0(X) = \bigoplus_{v \in V} \mathbb{Z} \cdot v,\ C_1(X) = \bigoplus_{e \in E} \mathbb{Z} \cdot e,\ C_n(X) = 0 \text{ si } n \geq 2,$$

avec la différentielle $\partial_1(e) = e(1) - e(0)$ (les autres différentielles étant nulles !).

On admet que l'application naturelle de ce complexe dans le complexe singulier de X induit un isomorphisme en homologie (c'est même une équivalence d'homotopie entre complexes).

1. Calculer la valeur de la cohomologie singulière de X en utilisant le complexe défini en introduction dans les cas suivants
   (a) $X = [0, 1]$
   (b) X est une union de deux segments attachés à une extrémité.
   (c) X est le bord d'un triangle, d'un carré, d'un polygone quelconque. Que remarquez-vous ? Retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Hurewicz.
   (d) X est un arbre.
2. Montrer que l'homologie d'un graphe est sans torsion. On appelle *genre* de X le rang de $\mathrm{H}_1(X)$.
3. Montrer qu'un graphe fini se rétracte par déformation (c'est-à-dire que la rétraction est une équivalence d'homotopie) sur un graphe dont tous les sommets sont de degré au moins 2.
4. Montrer qu'un élément de $C_1(X)$ dont l'image par ∂_1 est nulle est une somme d'éléments de $C_1(X)$ de la forme $e_1 + \cdots + e_r$ tels que $e_{i+1}(0) = e_i(1)$ et tels que les $e_i(0)$ sont distincts (en posant $e_{r+1} = e_1$; on s'autorise éventuellement à renverser l'orientation des e_i pour éviter les questions de signe). On appelle un tel élément un *cycle élémentaire* de X. En déduire qu'il existe une famille de cycles élémentaires telle que $\mathrm{H}_1(X)$ est le groupe abélien libre engendré par cette famille.
5. Construire deux graphes de même genre et qui ne sont pas homotopiquement équivalents.

Exercise 2. Homologie d'un espace triangulé

Soit X un espace topologique. Une *triangulation* de X est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une famille $\mathcal{X}_n$ de n-simplexes de X telle que

— Chaque simplexe de $\mathcal{X}_n$ induit un homéomorphisme sur son image.

— La réunion des images de ces simplexes recouvre X.

— L'intersection de l'image deux n-simplexes de $\mathcal{X}_n$ est l'image d'un simplexe d'un certain $\mathcal{X}_k$ avec $k \leq n$.

1. Donner une triangulation des surfaces suivantes :
   (a) $X = [0, 1]^2$.
   (b) $X = S^2$.
   (c) $X = \mathbb{R}P^2$.
   (d) X est le ruban de Moebius.
   (e) X est un tore.
   (f) X est une bouteille de Klein.
2. On considère le complexe donné par la formule

$$C_n(X) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{X}_n} \mathbb{Z} \cdot \sigma$$

avec les différentielles $\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[e_0,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n]}$.

Montrer qu'il s'agit bien d'un complexe de chaînes, puis calculer son homologie dans les cas de la question précédente.

En fait comme dans l'exercice précédent, l'application naturelle de ce complexe dans le complexe singulier de X induit un isomorphisme en homologie (c'est même une équivalence d'homotopie entre complexes). Le vérifier pour le premier groupe d'homologie à l'aide du théorème de Hurewicz sur les exemples précédents.

3. En déduire la valeur des groupes de cohomologie de S^n.

Exercise 3. Intervalle pour les complexes de chaînes

On considère le complexe de chaînes I défini par les formules :

$$I_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},\ I_1 = \mathbb{Z},\ I_n = 0 \text{ si } n \geq 2.$$

avec la différentielle $\partial_1(x) = (x, -x)$.

On note $\mathbb{Z}$ pour le complexe concentré en degré 0 et de valeur $\mathbb{Z}$ en ce degré. On a une factorisation du morphisme canonique $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ en

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \overset{i_0 \oplus i_1}{\hookrightarrow} I \xrightarrow{p} \mathbb{Z}.$$

1. Montrer que deux morphismes de complexes $f, g : C \to D$ sont homotopes si et seulement s'il existe un morphisme $H : C \otimes I \to D$ tel que $1_C \otimes i_0 = f$ et $1_C \otimes i_1 = g$.
2. Montrer que $p \otimes 1_C : I \otimes C \to C$ est une équivalence d'homotopie surjective degré par degré.

Exercise 4. Transformations naturelles entre foncteurs, le morphisme d'Hurewicz est une transformation naturelle

On rappelle qu'une *catégorie* est la donnée d'objets et de flèches entre ces objets avec les propriétés suivantes (pour deux objets X et Y, notons $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ l'ensemble des flèches de X dans Y) :

— Il existe une flèche $Id_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$.

— Il existe des applications

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z).$$

— Pour tous f, g, h composables, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

— Si $f : X \to Y$, $f \circ Id_X = Id_Y \circ f = f$.

Un *foncteur* F entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ est la donnée pour tout objet X de $\mathcal{C}$ d'un objet $F(X)$ de $\mathcal{C}'$ et pour toute flèche de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, d'une flèche $F(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$.

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories et $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ deux foncteurs. Une *transformation naturelle* $\Theta : F \Rightarrow G$ est la donnée d'une famille de flèches $(\Theta_X : F(X) \to G(X))_{X \in ob(\mathcal{C})}$ telle que pour toute flèche $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\Theta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\Theta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

commute. Une transformation naturelle inversible est un *isomorphisme naturel*.

1. Montrer que si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des catégories, les foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ forment une catégorie (avec pour flèches les transformations naturelles).
2. Montrer que $\widetilde{H}_i$ et π_i dont des foncteurs de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégorie des groupes.
3. Construire une transformation naturelle $\pi_1 \Rightarrow H_1$ à partir du morphisme de Hurewicz.