ENS de Lyon — Master 1 – Topologie algébrique
TD4 — 2020-2021

Mayer-Vietoris (II), Degré et applications

Exercice 1. D'autres calculs de groupes d'homologie

Calculer les groupes d'homologies des espaces topologiques suivants :

1. Le tore.
2. La bouteille de Klein.
3. Le complémentaire d'un cercle dans $\mathbb{R}^3$.
4. Le tore à deux trous.

Exercice 2. Homlogie de la surface de genre g

1. Soit X_g une sphère dont on a retiré $2g$ disques ouverts disjoints D_i. Calculer les groupes d'homologies de X_g et décrire l'application induite en homologie par l'inclusion $\bigcup_{i=1}^{2g} \partial D_i \to X_g$.
2. En déduire l'homologie du tore à g trous.

Exercice 3. Classe fondamentale de la sphère

On appelle *classe fondamentale* de la sphère $\mathbb{S}^n$ un générateur du groupe $\mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n)$.

1. Soit (U, V) un recouvrement ouvert d'un espace topologique X. En regardant attentivement la démonstration du théorème de Mayer-Vietoris, donner une méthode pour en calculer le connectant $\delta : \mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{H}_{n-1}(U \cap V)$.
2. En déduire une classe fondamentale de $\mathbb{S}^n$.
3. Construire un morphisme de groupes surjectifs
$$\pi_n(\mathbb{S}^n) \to \mathrm{H}_n(\mathbb{S}^n).$$

Exercice 4. Applications de la notion de degré

1. Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ sans point fixe, montrer que $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.
2. En déduire le *théorème de Brouwer* : une application continue de la boule unité fermée B^n dans elle-même a un point fixe.
3. En déduire le *théorème de Perron-Frobenius* : une matrice carré inversible à coefficients positifs admet un vecteur propre à coefficients positifs associé à une valeur propre positive.

Exercice 5. Homologie d'un produit de sphères

Calculer l'homologie du produit $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$.