ENS de Lyon | Master 1 – Topologie algébrique
TD6 | 2020-2021

Homologie cellulaire

Exercice 1. CW-complexes

1. Soit $n \geq 1$, montrer que $\mathbb{S}^n$ admet une décomposition cellulaire avec deux cellules. Munir $\mathbb{S}^n$ également d'une structure de CW-complexe dont le k-squelette est homéomorphe à $\mathbb{S}^k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
2. Donner une décomposition cellulaire des espaces topologiques suivants : $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$,$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $\mathbb{R}$ et la surface orientable de genre g, notée Σ_g (qu'on pourra voir comme un $4g$-gone de côtés $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots a_g, b_g, c_g, d_g$ où on identifie tous les sommets et ou on identifie les arêtes a_i et c_i^{-1} et les arêtes b_i et d_i^{-1}.
3. Soit X un CW-complexe, et soit $k \geq 0$ un entier. Montrer que le k-squelette X^k de X est un sous-complexe de X.
4. Soit X un CW-complexe. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, l'espace quotient X^k/X^{k-1} est soit réduit à un point, soit homéomorphe à un bouquet de sphères de dimension k.
5. Montrer qu'un sous-ensemble d'un CW-complexe est ouvert (resp. fermé) si et seulement si chaque intersection avec l'intérieur d'une cellule du complexe est ouverte (resp. fermée) dans cette cellule.
6. Montrer qu'un CW-complexe est compact si et seulement s'il est fini.
7. Montrer qu'un CW-complexe est connexe par arcs si et seulement si son 1-squelette l'est.
8. Montrer que le produit de deux CW-complexes peut naturellement être muni d'une structure de CW-complexe.

Exercice 2. Homlogie des espace classiques

En utilisant l'homologie cellulaire, calculer l'homologie de :

1. l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
2. l'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
3. Σ_g.
4. la surface non orientable de genre g, notée Σ'_g obtenue comme un $2g$-gone à côtés $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$. avec $a_i = b_i$.

Exercice 3. Points antipodaux

Calculer l'homologie des espaces suivants :

1. l'espace obtenu à partir de $\mathbb{S}^2$ en identifiant les points antipodaux de son équateur.
2. l'espace obtenu à partir de $\mathbb{S}^3$ en identifiant les points antipodaux de son équateur.

Exercice 4. Espaces de Moore

Étant donné un groupe abélien G et un entier $n \geq 1$ on appelle *espace de Moore* pour (G, n) un CW-complexe X tel que $\mathrm{H}_n(X) = G$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_i(X) = 0$ pour $i \neq n$.

1. Construire un espace de Moore pour $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et n quelconque.
2. Construire un espace de Moore pour G abélien de type fini et n quelconque.
3. Construire un espace de Moore pour G et n quelconques.
4. Soient $(G_i)_{i \geq 1}$ des groupes abéliens. Construire un espace topologique connexe par arcs X tel que $\mathrm{H}_i(X) = G_i$ pour tout $i \geq 1$.

Exercice 5. Homologie d'un produit de sphères

Calculer l'homologie du produit $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ à l'aide de l'homologie cellulaire.

Exercice 6. Caractéristique d'Euler

1. Calculer la caractéristique d'Euler de Σ_g et de Σ'_g.
2. En déduire une condition nécessaire pour qu'il existe un revêtement $\Sigma_h \to \Sigma_g$. Montrer que c'est en fait une condition suffisante.

3. On suppose que le CW-complexe fini X s'écrit comme une réunion $X = A \cup B$. Montrer que

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

4. Calculer la caractéristique d'Euler du produit de deux CW-complexes finis.

Exercice 7. Homologie simpliciale

Retrouver l'homologie simpliciale décrite dans l'exercice 2 du TD 3 à partir de l'homologie cellulaire.

Il y a une coquille dans l'exercice en question. Il manque l'hypothèse qu'une face d'un simplexe de $\mathcal{X}_n$ est un simplexe de $\mathcal{X}_k$ pour un certain $k < n$, ainsi qu'une hypothèse de finitude locale : il existe un voisinage de chaque point de X qui n'intersecte qu'un nombre fini de simplexes ; cela garantit par exemple que X vu comme réunion de ses points n'est pas toujours un ensemble simplicial.