Homologie à coefficients, cohomologie

Exercice 1.

Soit G un groupe. Calculer l'homologie à coefficients dans G des espaces suivants :

1. $\mathbb{C}P^n$.
2. $\mathbb{R}P^n$.
3. La surface orientable de genre g, Σ_g.
4. La surface non orientable de genre g, Σ'_g.

Exercice 2.

Soit G un groupe. Calculer la cohomologie à coefficients dans G de S^n en utilisant Mayer-Vietoris. Calculer celle des espaces du premier exercice. On pourra admettre que le complexe dual du complexe $C_*^{CW}(X)$ calcule la cohomologie de X.

Exercice 3.

Soit A un fermé de X qui est un rétracte par déformation forte d'un ouvert U le contenant. Soit G un groupe. Montrer que

$$H^n(X, A; G) = \widetilde{H}^n(X/A; G).$$

On pourra admettre la version relative de la suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie. Formuler (et démontrer) l'équivalent de l'égalité ci-dessus en homologie.

Exercice 4.

Soit $f : S^n \to S^n$ de degré d. Montrer que l'application induite par f en cohomologie est la multiplication par d.

Exercice 5.

Soit X un graphe fini connexe de genre g (*i.e.* g est le rang de $H_1(X; \mathbb{Z})$) qui n'a pas de sommet d'arité 1. Le groupe des automorphismes de $H_1(X; \mathbb{Z})$ est alors $GL_g(\mathbb{Z})$.

Soit G un groupe fini d'homéomorphismes de X. Montrer que l'application

$$\Psi : \begin{cases} G & \to & GL_g(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & H_1(f) \end{cases}$$

est injective. Montrer qu'il en est de même si l'on remplace $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pour $m > 2$. Que se passe-t-il si $m = 2$?

Exercice 6.

Soit X un espace topologique. De la suite exacte

$$0 \to C_*(X) \xrightarrow{\times n} C_*(X) \to C_*(X; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0$$

déduire immédiatement que l'on a une suite exacte courte pour tout i :

$$0 \to H_i(X)/n \to H_i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to n - \text{torsion}(H_{i-1}(X)) \to 0.$$

Comparer avec le théorème des coefficients universels.