Théorème des coefficients universels, foncteurs Tor et Ext

Exercice 1.

Soit G un groupe abélien. A l'aide du théorème des coefficients universels, calculer l'homologie et la cohomologie à coefficients dans G des espaces suivants :

1. $\mathbb{C}P^n$.
2. $\mathbb{R}P^n$.
3. La surface orientable de genre g, Σ_g.
4. La surface non orientable de genre g, Σ'_g.

Exercice 2.

Soit H un groupe abélien. Calculer $\mathrm{Tor}(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Exercice 3.

1. Soit
$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$
une suite exacte de groupe abéliens et H un groupe abélien. Montrer qu'on a une suite exacte :
$$0 \to \mathrm{Hom}(H, G') \to \mathrm{Hom}(H, G) \to \mathrm{Hom}(H, G'') \to \mathrm{Ext}(H, G') \to \mathrm{Ext}(H, G) \to \mathrm{Ext}(H, G'') \to 0.$$
2. En déduire la valeur de $\mathrm{Ext}(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ si H est de type fini.
3. Soit H un groupe abélien de torsion. Montrer que $\mathrm{Ext}(H, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. On pourra admettre (cf. exercice 5) que $\mathrm{Ext}(H, \mathbb{Q}) = 0$ pour tout groupe abélien H.

Exercice 4.

1. Rappeler la définition d'un $\mathbb{Z}$-module projectif ainsi que les caractérisations équivalentes.
2. On appelle *résolution projective* d'un groupe G une suite exacte longue
$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to G \to 0$$
telle que les P_i sont projectifs. Montrer que l'homologie du complexe
$$\cdots \to P_1 \otimes H \to P_0 \otimes H \to G \otimes H \to 0$$
est indépendante de la résolution projective choisie. En déduire qu'on peut calucler $\mathrm{Tor}(H, G)$ en utilisant seulement une résolution projective de G.

   On a un résultat similaire pour les Ext.

Exercice 5. Soit I un groupe abélien. On dit que I est injectif si le foncteur $\mathrm{Hom}(-, I)$ est exact.

1. Montrer que I est injectif si et seulement si pour toute morphisme injectif de groupes abéliens $H \to G$ et tout morphisme $f : H \to I$, il existe un morphisme $G \to I$ qui prolonge f.
2. Montrer que si I est injectif, la multiplication par tout entier n non nul est surjective (on dit que I est *divisible*).
3. Montrer qu'un $\mathbb{Z}$-module divisible est injectif (indication : on pourra utiliser le lemme de Zorn et constater que la divisibilité de I est équivalente au critère d'extension de la question précédente sur les idéaux de $\mathbb{Z}$).
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont injectifs.

5. Une résolution injective d'un groupe abélien G est une suite exacte

$$0 \to G \to I_0 \to I_1 \to \cdots$$

telle que les I_i sont injectifs. Montrer que si H est un groupe abélien, l'homologie du complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}(H, G) \to \mathrm{Hom}(H, I_0) \to \mathrm{Hom}(H, I_1) \to \cdots$$

est indépendante de la résolution injective choisie.

On admet le théorème (difficile) suivant dû à Eilenberg et Cartan : si

$$0 \to G \to I_0 \to I_1 \to \cdots$$

est une résolution injective de G, et si on note C^* le complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}(H, I_0) \to \mathrm{Hom}(H, I_1) \to \cdots$$

alors,

$$H^i(C^*) = \begin{cases} \mathrm{Hom}(H, G) & \text{si } i = 0 \\ \mathrm{Ext}(H, G) & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. En déduire que si I est injectif, $\mathrm{Ext}(H, I) = 0$.

7. En déduire que si $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ est une suite exacte de groupes abéliens, pour tout groupe abélien H, on a une suite exacte longue :

$$0 \to \mathrm{Hom}(G'', H) \to \mathrm{Hom}(G, H) \to \mathrm{Hom}(G', H) \to \mathrm{Ext}(G'', H) \to \mathrm{Ext}(G, H) \to \mathrm{Ext}(G', H) \to 0.$$