Cup-produit

Exercice 1.
Soit R un anneau et X un espace topologique connexe par arcs. Décrire le cup produit

$$\smile : \mathrm{H}^0(X,R) \times \mathrm{H}^i(X,R) \to \mathrm{H}^i(X,R).$$

Exercice 2.
Soit R un anneau. Calculer l'anneau $\mathrm{H}^*(S^n,R)$ (avec pour multiplication le cup-produit).

Exercice 3. Dans l'exercice 2 du TD 3, on a défini la notion d'espace triangulé généralisé. Il y a une coquille dans l'exercice en question. Il manque l'hypothèse qu'une face d'un simplexe de $\mathcal{X}_n$ est un simplexe de X_k pour un certain $k < n$, ainsi qu'une hypothèse de finitude locale : il existeun voisinage de chaque point deXqui n'intersecte qu'un nombre fini de simplexes (cela garantit parexemple que X vu comme réunion de ses points n'est pas toujours un ensemble simplicial). On parle en fait plutôt de *complexe simplicial*. On conserve dans cet exercice les notations du préambule de l'exercice 2 du TD 3. On notera

$$C_n^{\mathrm{simp}}(X) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{X}_n} \mathbb{Z} \text{ et } C^n_{\mathrm{simp}}(X,R) = \mathrm{Hom}(C_n^{\mathrm{simp}}(X),R).$$

1. Expliquer pourquoi un complexe simplicial est un cas particulier de CW-complexe. Expliquer pourquoi $C^*_{\mathrm{simp}}(X,R)$ est un sous-complexe de $C^*(X,R)$ et montrer que les applications différentielles de $C^*_{\mathrm{simp}}(X,R)$ sont les mêmes que les différentielles de la cohomologie cellulaire. En déduire que l'on peut calculer la cohomologie cellulaire à coefficients dans R d'un complexe simplicial X à l'aide du complexe de cochaînes $C^*_{\mathrm{simp}}(X,R)$.
2. En déduire que pour calculer le cup produit
$$\mathrm{H}^n(X,R) \times \mathrm{H}^m(X,R) \to \mathrm{H}^{n+m}(X,R)$$
il suffit de décrire l'application $C^n_{\mathrm{simp}}(X,R) \times C^m_{\mathrm{simp}}(X,R) \to C^{n+m}_{\mathrm{simp}}(X,R)$.

Exercice 4.
Soit $g \geq 1$ un entier. Le but de cet exercice est de comprendre le cup-produit sur la surface orientable de genre g (notée Σ_g) pour la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Rappeler la valeur des groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de Σ_g.
2. Expliquer pourquoi le seul produit "intéressant" est le produit
$$\smile : \mathrm{H}^1(\Sigma_g,\mathbb{Z}) \times \mathrm{H}^1(\Sigma_g,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(\Sigma_g,\mathbb{Z}).$$
3. On rappelle que la surface de genre g peut être décrite comme un $4g$-gone $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \ldots a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$. Montrer que l'on obtient une triangulation de Σ_g en considérant les $4g$ triangles dont les sommets sont le centre du $4g$-gone et les deux sommets d'une arête.
4. On sait que la famille $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ forme une base de $\mathrm{H}_1(X)$. Par le théorème des coefficients universels, $\mathrm{H}^1(\Sigma_g,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1(\Sigma_g),\mathbb{Z})$. On a donc une base α_i, β_i de $\mathrm{H}^1(\Sigma_g,\mathbb{Z})$ duale de la base a_i, b_i.
Construire des cocycles ϕ_i et ψ_i de $C^1_{\mathrm{simp}}(\Sigma_g,\mathbb{Z})$ tels que $\phi_i(a_j) = \delta_{i,j}$, $\phi_i(b_j) = 0$, $\psi_i(a_j) = 0$ et $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.
5. Décrire le cup produit sur la cohomologie de Σ_g à coefficient dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5.
Appliquer la méthode de l'exercice précédent à la surface non orientable de genre g pour caluler le cup-produit sur sa cohomologie à coefficents dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 6.
Soit X l'espace topologique obtenu en recollant une 2-cellule à S^1 au moyen de l'application $z \mapsto z^m$.

1. Calculer la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de X.

2. Montrer que X a une structure de complexe simplicial en décrivant X comme un m-gone dont on recolle tous les sommets.

3. Appliquer à X la méthode des exercices précédents pour caluler le cup-produit sur sa cohomologie à coefficents dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.