SOLUTIONS DU PARTIEL – 5 mars 2024

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (On ne demande pas de justification).

(a) Il esiste une retraction $r : X \to Y$ telle que X est un espace topologique contractile et Y est un espace topologique non contractile.

(b) Considerer le diagramme de groupes abeliens et homomorphismes

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_3} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_4} \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 \end{array}$$

Supposons que les suites horizontales sont exactes, ϕ_1 est surjectif, et ϕ_2, ϕ_4 sont injectifs. Alors ϕ_3 est injectif.

(c) Toute application continue $S^1 \times S^1 \to S^1$ est homotope à une application constante.

(d) Il existe un CW complexe compact X tel que $H_n(X)$ est non-trivial en une infinité de degrés n.

(e) Il n'existe pas d'application surjective $f : S^2 \to S^2$ avec $\deg(f) = 0$.

Solution.

(a) Faux. Soit $h_t : X \to X$ l'homotopie qui realise la contraction de X, i.e. $h_0 = \mathrm{id}$ et $h_1 \equiv x_0$. Alors $r \circ h_t|_Y : Y \to Y$ est une homotopie qui realise une contraction de Y.

(b) Vrai. Supposons que $\phi_3(a_3) = 0$. Alors, comme ϕ_4 est injectif, on a $\alpha_3(a_3) = 0$. Donc $a_3 = \alpha_2(a_2)$ pour un certain $a_2 \in A_2$. Comme $\phi_2(a_2) \in \ker(\beta_2)$, on a $\phi_2(a_2) = \beta_1(b_1)$ pour un certain $b_1 \in B_1$, et $b_1 = \phi_1(a_1)$ pour un certain $a_1 \in A_1$. Soit $a_2' = \alpha_1(a_1)$. Comme ϕ_2 est injectif et $a_2 - a_2' \in \ker(\phi_2)$, on a $a_2 = a_2'$. On conclut que $a_2 \in \ker(\alpha_2)$, et donc $a_3 = \alpha_2(a_2) = 0$.

(c) Faux. L'application $f : S^1 \times S^1 \to S^1$, $f(x, y) = x$ n'est pas homotope à une constante. En fait, si l'on considère l'application continue $\iota : S^1 \to S^1 \times S^1$, $\iota(x) = (x, y)$, on a $f \circ \iota = \mathrm{id}$. Cela implique que $f_* : H_1(S^1 \times S^1) \to H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ est surjectif, tandis que toute application $g : S^1 \times S^1 \to S^1$ homotope à une constante induit l'homomorphisme trivial $0 = g_* : H_1(S^1 \times S^1) \to H_1(S^1)$.

(d) Faux. Un CW complexe compact X possède seulement un nombre fini de cellules. En particulier, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X = X^n$, et pour le théorème d'homologie cellulaire on a donc que $H_d(X) = 0$ pour tout $d > n$.

(e) Faux. Soit S^2 la sphère unité, et $B_+^2 = S^2 \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty))$ l'hémisphère supérieur. L'application

$$f : S^2 \to B_+^2, \qquad f(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{n-1}, |x_n|)$$

est continue et surjective. Soit $q : B^2_+ \to B^2_+/\partial B^2_+$ l'application quotient. La composition $q \circ f : S^2 \to B^2_+/\partial B^2_+$ est surjective et homotope à une constante. Une homotopie explicite $h_t : S^2 \to B^2_+/\partial B^2_+$ est la suivante :

$$h_t(x', x_n) = \begin{cases} \left[\frac{\sqrt{1-(t+(1-t)|x_n|)^2}}{|x'|}x', t + (1-t)|x_n|\right], & x' \neq 0, \\ (0, |x_n|), & x' = 0. \end{cases}$$

On a bien $h_0 = q \circ f$, et $h_1 \equiv [0, ..., 0, 1]$. Pour tout homéomorphisme

$$g : B^2_+/\partial B^2_+ \to S^2,$$

l'application $g \circ q \circ f$ est surjective et homotope à une constante, et donc

$$\deg(g \circ q \circ f) = 0.$$

$\square$

Exercice 2. Un element $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ est trivial si et seulement s'il existe une homotopie $h_s : [0, 1] \to X$ telle que $h_0 = \gamma$, $h_1 \equiv x$, et $h_s(0) = h_s(1) = x$ pour tout $s \in [0, 1]$. Supposons maintenant que, pour un certain $[\zeta] \in \pi_1(X, x)$, il existe juste une homotopie $k_s : [0, 1] \to X$ telle que $k_0 = \zeta$, $k_1 \equiv y$ pour un certain $y \in X$, et $k_s(0) = k_s(1)$ pour tout $s \in [0, 1]$. Est-il vrai que $[\zeta] \in \pi_1(X, x)$ est trivial ?

Solution. Oui. En effet, soit k_s une telle homotopie. Sans perte de généralité (quitte à modifier l'homotopie k_s en lui ajoutant un chemin de y à x), on peut supposer que $y = x$. Soit $\eta : [0, 1] \to X$ le lacet $\eta(s) = h_s(0) = h_s(1)$ basé au point $\eta(0) = \eta(1) = x$. Alors la famille des lacets

$$h_s(t) := (\eta|_{[0,s]} * k_s * \overline{\eta|_{[0,s]}})(\tfrac{t}{1+2s})$$

est une homotopie du type $h_s : [0, 1] \to X$ telle que $h_0 = \zeta$, $h_1 = \eta * \overline{\eta}$, et $h_s(0) = h_s(1) = x$ pour tout $s \in [0, 1]$. Cette homotopie implique

$$[\zeta] = [\eta * \overline{\eta}] = [\eta] \cdot [\eta]^{-1} = 1 \quad \text{dans } \pi_1(X, x). \qquad \square$$

Exercice 3. Soit $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sphère unité. Pour quelles dimensions $n \geq 0$ existe-t-il une application continue $f : S^n \to S^n$ telle que $f(x) \notin \{x, -x\}$ pour tout $x \in S^n$?

Solution. Si $n = 0$, une telle application $f = S^0 \to S^0$ n'existe clairement pas, car $S^0 = \{1, -1\}$.

Si $n = 2k - 1$ est impair, on peut voir S^n comme la sphere unité $S^{2k-1} \subset \mathbb{C}^k$, et l'application continue $f : S^{2k-1} \to S^{2k-1}$, $f(z_1, ..., z_k) = (iz_1, ..., iz_k)$ a la propriété voulue.

Si $n = 2h \geq 2$ est pair, pour toute application $f : S^{2h} \to S^{2h}$ on a $f(x) \in \{x, -x\}$ pour un certain $x \in S^{2h}$. Prouvons cela par l'absurde : supposons que $f(x) \notin \{x, -x\}$ pour tout $x \in S^{2h}$; alors le vecteur $W(x) := f(x) - x \in \mathbb{R}^{2h+1} \equiv T_x\mathbb{R}^{2h+1}$ n'est pas normale à T_xS^{2h} ; si $\pi_x : T_x\mathbb{R}^{2h+1} \to T_xS^{2h}$ est la projection orthogonale, on a $V(x) := \pi_x(W(x)) \neq 0$ pour tout $x \in S^{2h}$; on a donc construit un champ de vecteurs continue V sur S^{2h} qui ne s'annule nulle part, ce qui contredit le théorème de la boule chevelue. $\square$

Exercice 4. Soit $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ la sphère unité de dimension impair $2n+1$, et

$$\pi : SS^{2n+1} \to S^{2n+1}$$

son fibré tangent unitaire, i.e.

$$SS^{2n+1} = \big\{(x,v) \in \mathrm{T}S^{2n+1} \subset S^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+2} \;\big|\; \|v\| = 1\big\}, \qquad \pi(x,v) = x.$$

Determiner si les homomorphismes $\pi_* : H_d(SS^{2n+1}) \to H_d(S^{2n+1})$ sont surjectifs ou pas.

Solution. Soit V un champs de vecteurs sur S^{2n+1} qui ne s'annule nulle part (un tel V existe car S^{2n+1} a dimension impair). On a une application continue

$$\iota : S^{2n+1} \to SS^{2n+1}, \qquad \iota(x) = (x, V(x)/\|V(x)\|).$$

Comme $\pi \circ \iota = \mathrm{id}$, on conclut que $\pi_* : H_d(SS^{2n+1}) \to H_d(S^{2n+1})$ est surjectif pour tout $d \geq 0$. $\square$

Exercice 5. Le ruban de Möbius est la surface compacte à bord $M := \mathbb{R} \times [-1,1]/\sim$, où $(x,y) \sim (x+1,-y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-1,1]$. Existe-t-il une retraction $r : M \to \partial M$?

Solution. Une telle retraction n'existe pas. En fait, si $S^1 \subset \mathbb{C}$ est le cercle unité, l'application

$$\iota : S^1 \hookrightarrow M, \qquad \iota(e^{i2\pi x}) = [x,0]$$

est une équivalence d'homotopie, et donc induit un isomorphisme

$$\iota_* : H_1(S^1) \xrightarrow{\cong} H_1(M).$$

On a aussi un homeomorphisme

$$j : S^1 \to \partial M, \qquad j(e^{i2\pi x}) = \begin{cases} [2x,1], & x \in [0,1/2], \\ [2x,-1], & x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Vu comme application $j : S^1 \to M$, j est homotope à la composition $\iota \circ \kappa$, où

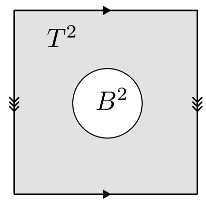
$$\kappa : S^1 \to S^1, \qquad \kappa(z) = z^2.$$

L'application κ a degré 2, et donc l'homomorphisme $\kappa_* : H_1(S^1) \to H_1(S^1)$ est la multiplication par 2. Supposons par l'absurde d'avoir une retraction $r : M \to \partial M$. Alors,

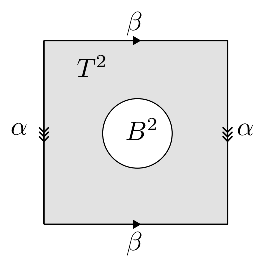
$$\begin{array}{ccccccccc} H_1(S^1) & \xrightarrow{\kappa_*} & H_1(S^1) & \xrightarrow[\cong]{\iota_*} & H_1(M) & \xrightarrow{r_*} & H_1(\partial M) & \xrightarrow[\cong]{j_*^{-1}} & H_1(S^1) \\ \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

et la composition de ces 4 homomorphismes est l'identité. En identifiant les groupes d'homologie avec $\mathbb{Z}$, on obtient $j_*^{-1} \circ r_* \circ \iota_*(2) = 1$. Mais il n'existe pas un homomorphisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ qui envoie $2 \mapsto 1$. $\square$

Exercice 6. Soit B^2 une boule compacte plongée dans le tore $T^2 = S^1 \times S^1$. Existe-t-il une retraction $r : T^2 \setminus \mathrm{int}(B^2) \to \partial B^2$?



Solution. Soit $X := T^2 \setminus \mathrm{int}(B^2)$, et supposons par l'absurde qu'il existe une retraction $r : X \to \partial B^2$. Alors l'inclusion $i : \partial B^2 \to X$ est une inverse à droite de r, c'est-à-dire que $r \circ i = \mathrm{id}$. Comme $\mathrm{id}_* = r_* \circ i_* : H_1(\partial B^2) \to H_1(\partial B^2)$ est un isomorphisme, il s'ensuit que $i_* : H_1(\partial B^2) \to H_1(X)$ est injectif. Soit $\gamma : S^1 \to \partial B^2$ le lacet qui effectue un tour complet de ∂B^2 dans le sens antihoraire. Alors $[\gamma]$ est un générateur de $\pi_1(\partial B^2) \cong H_1(\partial B^2)$. Le lacet $i \circ \gamma : S^1 \to X$ est homotope à $\alpha * \beta * \overline{\alpha} * \overline{\beta}$, où α et β sont les chemins dans X indiqués dans la figure ci-dessous :



Dans $H_1(X)$, on a

$$i_*[\gamma] = [i \circ \gamma] = [\alpha * \beta * \overline{\alpha} * \overline{\beta}] = [\alpha] + [\beta] - [\alpha] - [\beta] = 0.$$

Ceci contredit l'injectivité de i_*. Nous concluons donc qu'une rétraction $r : X \to \partial B^2$ ne peut pas exister.