DUALITÉ DE POINCARÉ

M^n variété topologique R-orientée, $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$

(on n'indiquera pas R)

$$PD \quad H^i_{comp}(M) \longrightarrow H_{n-i}(M)$$

$$H^i_{comp}(M) \cong \varinjlim_K H^i(M, M \setminus K)$$

$PD([\varphi]) = \mu_K \frown \varphi$ où $\varphi \in H^i(M, M\setminus K)$

$K \subset M$ compact

Vérifions que PD est bien défini

Si $[\varphi_1] = [\varphi_2] \in H^i_{comp}(M)$, où $\varphi_j \in H^i(M, M\setminus K_j)$

$K_1 \subset K_2$

alors $J \;.\; (M, M\setminus K_2) \xhookrightarrow{incl} (M, M \setminus K_1)$

$$\varphi_2 = J^* \varphi_1$$

$$\mu_{K_1} \frown \varphi_1 = (J_* \mu_{K_2}) \frown \varphi_1 = J_* \left(\mu_{K_2} \frown J^* \varphi_1\right)$$

$$= \underset{\substack{\| \\ id_*}}{J_*} \big(\underbrace{\mu_{K_2} \frown \varphi_2}_{\in H_{n-1}(M)} \big) = \mu_{K_2} \frown \varphi_2$$

Thm (Dualité de Poincaré) $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$

Si M^m est une variété topologique R-orientée,

alors $PD\ H^i_{comp}(M) \xrightarrow{\cong} H_{m-i}(M)$ est un isomorphisme

Rmq

- Toute variété est $\mathbb{Z}_2$-orientable
- Si M^m est fermée, alors $PD \cdot H^i(M) \xrightarrow{\cong} H_{m-i}(M)$

Preuve (on fait la preuve pour $R = \mathbb{Z}$; le cas $R = \mathbb{Z}_2$ est analogue)

- $M = \mathbb{R}^m$, $B^m \subset \mathbb{R}^m$ boule

$$H_i(\mathbb{R}^m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} \qquad H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus B) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = m \\ 0 & i \neq m \end{cases}$$

Thm des coeff univ

$$0 \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{\mathrm{Ext}(H_{i-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus B), \mathbb{Z})} \to H^i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus B), \mathbb{Z}) \to 0$$

Soit Ψ le generateur de $H^m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus B)$ t.q. $\underbrace{\Psi(\mu_B)}_{\mu_B \frown \Psi} = 1$

$$\Rightarrow \quad H^i_{comp}(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

$[\psi]$ générateur de $H^n_{comp}(\mathbb{R}^n)$

$PD([\psi]) = \mu_B \frown \psi = \psi(\mu_B) = 1$ générateur de $H_0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ PD est un isomorphisme

Donc le thm vaut pour $M = \mathbb{R}^n$

- Si le thm est vrai pour les ouverts $U, V \subset M$ et $U \cap V$, alors il est vrai pour $U \cup V$

suites exactes de Mayer-Vietoris.

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r, "\delta"] & H^i_{comp}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "PD", "\cong"'] & H^i_{comp}(U) \oplus H^i_{comp}(V) \arrow[r] \arrow[d, "PD \oplus PD", "\cong"'] & H^i_{comp}(U\cup V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "PD"] & {} \\
\arrow[r, "\partial"] & H_{n-i}(U\cap V) \arrow[r] & H_{n-i}(U) \oplus H_{n-i}(V) \arrow[r] & H_{n-i}(U\cup V) \arrow[r, "\partial"] & {}
\end{tikzcd}$$

isomorphisme par le lemme des cinq

exercice Le diagramme commute

- $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$, $M^n = \bigcup_{\alpha \geq 1} U_\alpha$, $U_\alpha \subset M$ ouvert
  Si le thm est vrai pour chaque U_α, alors il est vrai pour M

$$\begin{array}{ccc} H^i_{comp}(M) & \cong & \varinjlim_\alpha H^i_{comp}(U_\alpha) \\ \downarrow PD & & \cong \downarrow PD \\ H_{n-i}(M) & \cong & \varinjlim_\alpha H_{n-i}(U_\alpha) \end{array}$$

- Thm vrai pour $M \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

$M = \bigcup_{k \geq 1} V_k$ pour certains $V_k = \underbrace{B(x_k, r_k)}$

boule de rayon r_k centrée en x_k

1) thm vrai pour les convèxes (car il sont homeomorphes à $\mathbb{R}^n$);
2) supposons le thm vrai pour les unions de $k-1$ convexes

3) alors pour k convexes $U_1, .., U_k \subset \mathbb{R}^n$,

le thm est vrai pour

- $U_1 \cup .. \cup U_{k-1}$
- U_k
- $U_k \cap (U_1 \cup .. \cup U_{k-1}) = \overbrace{\underbrace{(U_k \cap U_1)}_{\text{convexe}} \cup .. \cup \underbrace{(U_k \cap U_{k-1})}_{\text{convexe}}}^{\times\, k-1}$

donc le thm est vrai pour

$$U_1 \cup . \cup U_k$$

On conclut que le thm est vrai pour toute union finie

$$V_1 \cup .. \cup V_k \subset M$$

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_k H^i_{comp}(V_1 \cup . \cup V_k) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "PD", "\cong"'] & \boxed{H^i_{comp}(M)} \arrow[d, "PD"] \\
\varinjlim_k H_{n-1}(V_1 \cup . \cup V_k) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \boxed{H_{n-i}(M)}
\end{tikzcd}$$

le diagramme implique que cette flèche est un isomorphisme

- M^n variété à base dénombrable

$$M = \bigcup_{k \geq 1} V_k$$ où chaque V_k est homeomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ thm vrai pour toute union finie $V_1 \cup .. \cup V_k$ (par récurrence, comme dans le point précédent)

$\Rightarrow$ thm vrai pour M (en prenant la limite directe)

- Et si M n'est pas à base dénombrable ?
  Lemme de Zorn !

$$\mathcal{U} = \left\{ U \subset M \text{ ouvert} \;\middle|\; PD \cdot H^1_{comp}(U) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(U) \right\}$$

(partialement ordonnée par l'inclusion)

Soit $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tq $\forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{U}'$ on a $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$

$$W := \bigcup_{V \in \mathcal{U}'} V$$

$$\begin{tikzcd} H^i_{comp}(W) \arrow[d, "PD"'] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \varinjlim_{V\in \mathcal{U}'} H^i_{comp}(V) \arrow[d, "PD", "\cong"'] \\ H_{n-i}(W) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \varinjlim_{V\in \mathcal{U}'} H_{n-i}(V) \end{tikzcd}$$

(car $\mathcal{U}'$ est totalement ordonnée)

$\Rightarrow H^i_{comp}(W) \xrightarrow[\cong]{PD} H_{n-i}(W)$ est un isomorphisme

$\Rightarrow W \in \mathcal{U}$

Par le lemme de Zorn, $\exists\, U \in \mathcal{U}$ maximale

(i.e. $V \subseteq U \quad \forall V \in \mathcal{U}$)

Alors $U = M$

(Sinon $\exists\, x \in M \setminus U$.
Soit $V \subset M$ voisinage ouvert de x tq. $V \cong \mathbb{R}^n$
Alors $V \in \mathcal{U}$, mais $V \not\subset U$ $\lightning$)

$\square$