Groupe fondamental. Groupes d'homotopie supérieurs

Exercice 1. Caractère abélien des groupes d'homotopie supérieurs.
En utilisant le dessin vu au TD précédent, montrer que les groupes d'homotopie supérieurs sont abéliens.

Exercice 2. Groupes d'homotopie supérieurs et revêtements.
Soit $p : (X', x') \to (X, x)$ un revêtement et $n \geqslant 1$ un entier.

1. Montrer que toute application continue $\sigma : I^n \to X$ se relève en une application continue $\widetilde{\sigma} : I^n \to X'$. Montrer que le relèvement est unique si l'on fixe l'image d'un point.
2. On suppose que $n \geqslant 2$. Montrer que si σ envoie ∂I^n sur x, alors $\widetilde{\sigma}$ envoie ∂I^n sur x'.
3. En déduire que $p_* : \pi_n(X', x') \to \pi_n(X, x)$ est un isomorphisme de groupes.
4. Calculer les groupes d'homotopie de $\mathbb{S}^1$.
5. Calculer les groupes d'homotopie du tore de dimension n, $\mathbb{T}^n$.

Exercice 3. Espaces projectifs réels
Soit $n \geqslant 1$ un entier. On définit l'espace projectif réel de dimension n, noté $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ comme le quotient de $\mathbb{S}^n$ par la relation $x \sim -x$ pour x dans $\mathbb{S}^n$.
Calculer le groupe fondamental de l'espace projectif réel. Que peut-on dire de ses groupes d'homotopie supérieurs ?

Exercice 4. Ruban de Möbius.
Soit M le ruban de Möbius obtenu comme le quotient de $[0, 1]^2$ par la relation $(0, x) \sim (1, 1 - x)$. Calculer le groupe fondamental de M. On pourra trouver un revêtement $\mathbb{R} \times [0, 1] \to M$.

Exercice 5. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit $e = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$. On admet que la sphère $\mathbb{S}^n$ n'est pas contractile (cela sera démontré en cours plus tard). Montrer qu'alors $\pi_n(\mathbb{S}^n, e)$ est non trivial.

Exercice 6. Petits groupes d'homotopie des sphères.
Soient $n > k \geqslant 1$ deux entiers. Soit $e = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$. Le but de cet exercice est de montrer que $\pi_k(\mathbb{S}^n, e)$ est trivial.

1. Soit $f : I^k \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On suppose que l'image de ∂I^k par f n'est nulle part dense dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est homotope relativement à ∂I^n à une application d'image nulle part dense dans $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $\sigma : I^k \to \mathbb{S}^n$ une application continue.
   (a) Montrer qu'il existe un entier m tel que pour tout $(i_1, \dots, i_k) \in \{0, \dots, m-1\}^k$, $\sigma|_{[\frac{i_1}{m}, \frac{i_1+1}{m}] \times \cdots \times [\frac{i_k}{m}, \frac{i_k+1}{m}]}$ n'est pas surjective.
   (b) En déduire que σ est homotope relativement à ∂I^n à une application d'image nulle part dense dans $\mathbb{S}^n$.
3. En déduire que $\pi_k(\mathbb{S}^n, e)$ est trivial.

Exercice 7. Autour de la fibration de Hopf.

1. La droite projective complexe $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ est le quotient de $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par la relation d'équivalence $(x, y) \sim (\lambda x, \lambda y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que la droite projective complexe est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$.
2. Montrer que les applications $x \in \mathbb{C} \mapsto [x, 1] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ et $x \in \mathbb{C} \mapsto [1, x] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ sont des homéomorphismes de $\mathbb{C}$ vers des ouverts U_1 et U_2 de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ et que $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = U_1 \cup U_2$.

3. On considère la sphère $\mathbb{S}^3$ plongée dans $\mathbb{C}^2$ comme le sous-ensemble
$$\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\}.$$
On définit une application continue
$$h\colon (x,y) \in \mathbb{S}^3 \mapsto [x,y] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1.$$
Montrer que les applications $\theta_1 : (x,y) \in h^{-1}(U_1) \mapsto ([x,y], y/|y|) \in U_1 \times \mathbb{S}^1$ et $\theta_2 : (x,y) \in h^{-1}(U_2) \mapsto ([x,y], x/|x|) \in U_2 \times \mathbb{S}^1$ sont bien définies et sont des homéomorphismes.

4. Montrer si $i \in \{1,2\}$ et si p est la première projection, le diagramme
$$\begin{tikzcd} h^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\theta_i"] \arrow[dr, "h"'] & & U_i \times \mathbb{S}^1 \arrow[dl, "p"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$
est commutatif.

5. L'application h définit une classe dans $\pi_3(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, [1,0])$. On suppose que cette classe est triviale. Soit alors $H : I \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ telle que
   - Pour tout x dans $\mathbb{S}^3$, on a $H(0,x) = h(x)$.
   - Pour tout x dans $\mathbb{S}^3$, on a $H(1,x) = [1,0]$.
   - Pour tout t dans I, on a $H(t,(1,0)) = [1,0]$.

   Montrer que H se relève en une application continue $\widetilde{H} : I \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ telle que pour tout x dans $\mathbb{S}^3$, on a $\widetilde{H}(0,x) = x$ et pour tout t dans I, on a $\widetilde{H}(t,(1,0)) = (1,0)$.

6. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{S}^3$, on a $\widetilde{H}(1,x)$ est dans $F = \{(x,0) \mid |x| = 1\}$ et que F est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

7. En utilisant le fait que $\pi_3(F,(1,0))$ est trivial, construire $H'\colon I \times \mathbb{S}^3 \to F$ telle que
   - Pour tout x dans $\mathbb{S}^3$, on a $H'(0,x) = \widetilde{H}(1,x)$.
   - Pour tout x dans $\mathbb{S}^3$, on a $H(1,x) = (1,0)$.
   - Pour tout t dans I, on a $H(t,(1,0)) = (1,0)$.

8. Exhiber une contradiction et en déduire que $\pi_3(\mathbb{S}^2,(1,0))$ est non trivial.