Topologie algébrique 2024, TD7 : variété (hyper)cubique de Poincaré

Soit V l'espace topologique (définition corrigée en remplaçant x par $1-x$, etc.)

$$(*) \qquad V = [0,1]^3/_{(0,y,z)\sim(1,1-z,y),(x,0,z)\sim(z,1,1-x),(x,y,0)\sim(1-y,x,1)}.$$

Notons

$$A = (0,0,0)\ ,\ B = (1,0,0)\ ,\ C = (0,1,0)\ ,\ D = (1,1,0)$$
$$A' = (0,0,1)\ ,\ B' = (1,0,1)\ ,\ C = (0,1,1)\ ,\ D' = (1,1,1).$$

Les identifications $(*)$ se traduisent par

$$(**) \qquad \begin{aligned} ABCD &\sim B'C'D'A' \\ ABB'A' &\sim D'DCC' \\ ADD'A' &\sim CC'B'B \end{aligned}$$

Description géométrique. On munit chaque face F du cube de *l'orientation de bord*, donnée par la normale extérieure $\vec{N}_F$: une base (v,w)du plan de la face est directe si $(v,w,\vec{N}_F)$ est une base directe de $\mathbb{R}^3$. On identifie chaque face F du cube avec cette orientation avec la face opposée $F^{opp} = F - \vec{N}$ *munie de l'orientation donnée par* $\vec{N}_F = -\vec{N}_{F^{opp}}$, en tournant d'un quart de tour dans le sens *indirect* : si $F = PQRS$ où l'ordre des sommet définit l'orientation, la face opposée est

$$P'Q'R'S' = PQRS - \vec{N}\ ,\ \text{avec orientation de bord}\ \ P'S'R'Q'.$$

Par un quart de tour direct, on identifie

$$PQRS \sim S'P'Q'R'.$$

Noter que si l'on part de la face opposée $P'S'R'Q'$, de normale extérieure $-\vec{N}$, on a $PSRQ = P'S'R'Q' - (-\vec{N})$, et

$$P'S'R'Q' \sim QPSR\ ,\ \text{soit}\ PQRS \sim S'P'Q'R',$$

Donc l'identitication $F \sim F^{opp}$ est bien la même que $F^{opp} \sim F$, il ne reste que trois identitfications.

Remarque. Les identifcations de $(*)$ sont bien des quarts de tour indirects : en effet, les orientations des faces par la normale extérieure sont

$$\begin{aligned} ADCB = -ABCD\ &,\ A'B'C'D' \\ ABB'A'\ &,\ D'C'CD = -D'DCC' \\ AA'DD' = -ADD'A'\ &,\ CC'B'B. \end{aligned}$$

(i) **Calcul de l'homologie de V.** Par définition, V a une structure de CW-complexe avec des faces cubiques (points, segments, carrés, cubes,...). Il y a (au quotient)

une cellule cubique c munie de l'orientation de $\mathbb{R}^3$
trois faces carrées $f_1 = ABCD\ ,\ f_2 = ABB'A'\ ,\ f_3 = ADD'A'$ avec les orientations données par l'ordre des sommets.

On note aussi c, f_1, f_2, f_3 les générateurs de $C_3(X)$ et de $C_2(X)$ associés Le nombre d'arêtes est plus difficile à trouver, il faut écrire toutes les identifications en utilisant les trois lignes de $(**)$:

$$(***) \qquad \begin{aligned} AB &\sim_1 B'C' \sim_3 D'D \\ AD &\sim_1 B'A' \sim_2 CC' \\ AA' &\sim_2 D'C' \sim_1 CB \\ CD &\sim_1 D'A' \sim_3 B'B. \end{aligned}$$

On a donc quatre arêtes, qui donnent quatre générateurs pour $C_1(X)$:

$$e_1 = AB \ , \ e_2 = AD \ , \ e_3 = AA' \ , \ e_4 = CD.$$

Enfin, toutes les identifications des sommets sont

$$\begin{aligned} A &\sim_1 B' \sim_2 C \sim_2 D' \\ A' &\sim_3 B \sim_1 C' \sim_3 D. \end{aligned}$$

Il y a donc deux sommets

$$v_0 = A = B' = C = D' \ , \ v_1 = A' = B = C' = D.$$

(plus correctement des classes d'équivalence $[A]$, etc.) Les différentielles du complexe de chaînes cellulaires $C_*(X)$ sont données par

$$\begin{aligned} &\partial_3 = 0 \text{ car chaque face du cube initial est identitiée à la face opposée} \\ &\partial_2 f_1 = AB + BC + CD + DA = e_1 - e_3 + e_4 - e_2 = (e_1 - e_2) - (e_3 - e_4) \\ &\partial_2 f_2 = e_1 - e4 + e_2 - e_3 = (e_1 - e_2) + 2(e_2 - e_3) + (e_3 - e_4) \\ &\partial_2 f_3 = e_2 - e_1 + e_4 - e_3 = -(e_1 - e_2) - (e_3 - e_4) \\ &\partial_1 e_1 = v_1 - v_0 = \partial_1 e_2 = \partial_1 e_3 = \partial_1 e_4. \end{aligned}$$

1) Donc $\mathrm{im}(\partial_1) = \mathbb{Z}(v_1 - v_0)$, d'où

$$H_0(X) \approx (\mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_1)/\mathbb{Z}(v_1 - v_0) \approx \mathbb{Z}.$$

Bien sûr, on le savait puisque X est connexe.

2) On a immédiatement $H_3(X) = \mathbb{Z}$, ce qui va dans le sens de prouver que V est une variété orientable (compacte, mais ceci est clair).

3) Ensuite, $(e'_1, e'_2, e'_3) := (e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3 - e_4)$ est linéairement indépendant, donc $\ker(\partial_2) = 0$, d'où $H_2(X) = 0$.

4) Reste à calculer $H_1(X)$. D'abord $\ker(\partial_1)$ est libre (sur $\mathbb{Z}$) de base (e'_1, e'_2, e'_3). Et dans les bases (f_1, f_2, f_3), (e'_1, e'_2, e'_3), la matrice de ∂_2 est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Par combinaisons de colonnes, celle-ci devient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{im}(\partial_2) = \mathbb{Z}e''_1 \oplus \mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}e''_2 \oplus 2\mathbb{Z}e''_3$ où (e''_1, e''_2, e''_3) est une base de $\ker(\partial_1)$. D'où

$$H_1(X) \approx \mathbb{Z}^3/(\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ (groupe de Klein).}$$

(ii) **Calcul du groupe fondamental $\pi_1(V)$.** Le théorème de Van Kampen dit (ou implique) que

$$\pi_1(V) \approx \pi_1(V^{(1)})/\langle\langle r_1, \cdots, r_q \rangle\rangle \ (q = 3 \text{ ici})$$

où

$$\begin{aligned} r_j =& (a_j)_\sharp(1) \ , \ a_j : S^1 \to V^{(1)} \text{ étant l'application d'attachement de } e_j \\ & \text{et } (a_j)_\sharp : \pi_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \to \pi_1(X) \text{ le morphisme induit entre les groupes fondamentaux,} \\ & \text{défini modulo conjugaison} \end{aligned}$$

$\langle\langle E \rangle\rangle \leq G$ est le sous-groupe distingué engendré par une partie E d'un groupe G.

De plus, si T est un arbre maximal de $V^{(1)}$ (ici, on peut prendre $T = CD$), alors $\pi_1(V^{(1)}$ (avec point base $v_0 = C = A$) est « libre sur les arêtes hors de T », soit sur des lacets de la forme $c * e * c'$, où e est une arête hors de T, allant de v à v' et c, c' les uniques chemins dans T allant de v_0 à v, v'.

Donc ici $\pi_1(V)$ est libre sur les lacets basés en $v_0 = A$,

$$1 * AB * DC \ , \ 1 * AD * DC \ , \ 1 * AA' * DC.$$

En écrasant CD en un point, on les notera $[AB], [AD], [AA']$ et aussi x, y, z.

Les applications d'attachement $a_j : S^1 \to V^{(1)}$ sont les bords des faces f_j. En utilisant les équivalences($***$) et $CD = DC = A$ (chemin constant), il vient

$$\begin{aligned} r_1 =& [AB * BC * CD * .DA] = [AB].[A'A].A.[DA] = [AB][AA']^{-1}[AD]^{-1} = xz^{-1}y^{-1} \\ r_2 =& [AB * BB' * B'A'.A'A] = [AB].A.[AD].[A'A] = xyz^{-1} \\ r_3 =& [AD * DD' * D'A'.A'A] = [AD].[BA].A.[A'A] = yx^{-1}z^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\pi_1(V) \approx \langle x, y, z \mid x = yz \ , \ z = xy \ , \ y = zx \rangle \approx \langle x, y \mid x = yxy \ , \ y = xyx \rangle.$$

On en déduit

$$x^2y = x.xy = x.y^{-1}x = xy^{-1}.x = yx.x,$$

donc x^2 est central et de même y^2 est central. Notons c cet élément. Ensuite, $x^2 = yxy.yxy = x^2y^4$, donc $c^2 = x^4 = 1$. On en déduit aisément (mais un peu péniblement) que

$$\pi_1(V) = \{1, c, x, cx, y, cy, z(= xy), cz\}.$$

Donc on a un unique morphisme $Q \to \pi_1(V)$ qui envoie i sur x et j sur y, il envoie alors $z = xy$ sur $k = ij$. Comme $iji = ki = j$ et $jij = -kj = i$, ce morphisme est un isomorphisme.

Finalement, $\pi_1(V)$ est le groupe quaternionien Q. On a $Q' = Z(Q)$ (centre) $= \{1, -1\}$, et l'abélianisé $Q/Q' = \{1, [i], [[j], [k]\} \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, conformément au résultat général $H_1(X) = \pi_1(X)/\pi_1(X)'$.

(iii) **À compléter par la preuve que V est une variété.**